Analysis und Differentialgleichungen

Mathematik für Informatiker II
Dozent: Dr. Guthmann
Sommersemester 2000

Philipp Becker / Stephan Fudeus / Christoph Thelen

Final Version v1.0f

Wir geben keine Garantie auf Richtigkeit des Skripts. Hinweise auf Fehler sowie Verbesserungsvorschläge bitte an mathe@3ph.de

LaTeX 2_ε-Version by 3ph

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen der Analysis

1.1 Axiome und Eigenschaften der reellen Zahlen

Axiomatische Einführung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$
Die Menge $\mathbb{R}$ genügt den folgenden Axiomen:

(R1) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper.

(R2) Es gibt eine Relation $\leq$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Ist $x \leq y$ und $y \leq z \Longrightarrow x \leq z$ (Transitivität)

(2) Gilt $x \leq y$ und $y \leq x \Longrightarrow x = y$

(3) Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$

(4) Ist $x \leq y$ und $z \in \mathbb{R}$ beliebig $\Longrightarrow x + z \leq y + z$

(5) Ist $0 \leq x$, $0 \leq y \Longrightarrow 0 \leq xy$

$\Longrightarrow$ Anordnungsaxiome

(R3) $\mathbb{R}$ ist ein archimedisch angeordneter Körper , d.h. es gilt:
Sind $x, y \in \mathbb{R}, 0 < x, 0 \leq y \Longrightarrow$ es existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $y \leq nx$
(Archimedisches Axiom)

Definition:
Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Dann heißt

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$ offenes Intervall
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall

(R4) Sei $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener Intervalle mit $a_n \leq a_{n+1}$ und $b_{n+1} \leq b_n$. Dann gilt:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset \quad \text{(Intervallschachtelungsaxiom)}$$

Satz 1:

(a) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $x = 0$ oder $x > 0$ oder $x < 0$

(b) Ist $x > 0, y > 0$, so folgt $x + y > 0$

(c) Ist $x > 0, y > 0$, so folgt $xy > 0$

Beweis:

(a) Sei $x \neq 0$. Aus (R2.3) mit $y = 0$ folgt $x < 0$ oder $x > 0$

(b) Benutze (R2.4). $0 = 0 + 0 \leq x + 0 \leq x + y$. Da $x + y \neq 0 \Longrightarrow x + y > 0$

(c) (R2.5) $\Longrightarrow xy \geq 0 \Longrightarrow xy > 0$ da $x \neq 0 \neq y$ □

Satz 2:

(a) Ist $x < 0$, so folgt $-x > 0$

(b) Ist $x < y$ und $x' < y'$ so folgt $x + x' < y + y'$

(c) Ist $x < y$ und $a > 0 \Longrightarrow ax < ay$. Ist $a < 0$, so $ax > ay$

(d) Ist $x \neq 0$, so gilt $x^2 > 0$

(e) Ist $0 < x < y$, so folgt $0 < y^{-1} < x^{-1}$

Beweis:

(a) Sei $x < 0 \Longrightarrow 0 < 0 - x = -x$

(b) Wie im Beweis von Satz 1(b) $x + x' < y + x' < y + y'$ (R2.4)

(c) Sei $x < y \Longrightarrow y - x > 0 \overset{a>0}{\Longrightarrow} a(y - x) > 0$ (Satz 1(c))
$\Longrightarrow ay - ax > 0 \Longrightarrow ax < ay$.
Ist $a < 0 \Longrightarrow -a > 0 \Longrightarrow (-a)(y - x) > 0 \Longrightarrow -ay + ax > 0 \Longrightarrow ax > ay$

(d) Folgt aus Satz 1(c) mit $y = x$

(e) Da $x \neq 0$ existiert $x^{-1} \neq 0 \Longrightarrow (x^{-1})^2 > 0$ nach (d).
Aus $x > 0$ folgt $x(x^{-1})^2 > 0$ nach 1(c) $\Longrightarrow x^{-1} > 0$.
Da $x > 0$ und $y > 0$ folgt $xy > 0 \Longrightarrow (xy)^{-1} > 0 \Longrightarrow x^{-1}y^{-1} > 0$.
Aus $x < y$ folgt mit (c) $x(x^{-1}y^{-1}) < y(x^{-1}y^{-1}) \Longrightarrow y^{-1} < x^{-1}$. □

Definition:
Sei $x \in \mathbb{R}$. Setze

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases} \quad \underline{\text{Absolutbetrag}}$$

Satz 3:

(a) Es gilt stets $|x| \geq 0$ und $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

(b) $|-x| = |x|$

(c) $|xy| = |x||y|$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ falls $y \neq 0$.

Beweis:

(a) Folgt aus Definition.

(b) Ist $x \geq 0$, so $|x| = x$, $|-x| = -(-x) = x \Longrightarrow |-x| = |x|$
Ist $x < 0$, so $|x| = -x$. Da $-x > 0$ folgt $|-x| = -x \Longrightarrow |-x| = |x|$

(c) 4 Fälle:

$$x \geq 0, y \geq 0 \Longrightarrow xy \geq 0 \text{ (R2.5)} \Longrightarrow |x| = x, |y| = y \Longrightarrow |x||y| = xy = |xy|$$

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0, y < 0 \\ x \geq 0, y < 0 \\ x \geq 0, y < 0 \end{array}\right\}\text{Analog}$$

Aus $x = \frac{x}{y}y$ folgt $|x| = |\frac{x}{y}||y| \Longrightarrow \frac{|x|}{|y|} = |\frac{x}{y}|$ □

Satz 4:
Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung)
und $|x + y| \geq |x| - |y|$.

Beweis:
Es gilt $x \leq |x|$ und $y \leq |y| \Longrightarrow x + y \leq |x| + |y|$ nach Satz 2(b).
$-x \leq |x|$ und $-y \leq |y| \Longrightarrow -x - y \leq |x| + |y|$.
Es ist $|x + y| = x + y$ falls $x + y \geq 0$ und $|x + y| = -(x + y) = -x - y$ falls $x + y < 0$. In jedem Fall ist $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Setze nun $u := x + y,\ v := -y$. Aus Dreiecksungleichung folgt dann:
$|u + v| \leq |u| + |v| \Longrightarrow |x| \leq |x + y| + |-y| = |x + y| + |y| \Longrightarrow |x| - |y| \leq |x + y|$
□

Folgerungen aus dem archimedischen Axiom (R3):
Setze $y = 1$. Dann folgt: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine natürliche Zahl n mit $n > x$.
Also gibt es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ eine ganze Zahl n mit $n \leq x < n + 1$. Dieses n ist eindeutig bestimmt und wir schreiben

$$[x] := n \text{ (größte ganze Zahl aus } x\text{, Gaußklammer)}$$

Beispiele: $\left[\sqrt{2}\right] = 1,\ \left[-\sqrt{2}\right] = -2$

Satz:
Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Beweis:
Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Aus Satz 2(e) folgt $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Satz 5:
Sei $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$(1+x)^n \geq 1+nx$ (Bernoullische Ungleichung)

Beweis:
IA: Behauptung gilt für $n = 0$.
IV: Die Behauptung gelte für ein n.
IS: Dann

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$$
$$(1+nx)(1+x) = 1 + x + nx + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1 + x + nx = 1 + (n+1)x$$

□

Satz 6:
In jedem offenen Intervall von $\mathbb{R}$ gibt es unendlich viele rationale Zahlen.

Beweis:
Sei (a, b) das gegebene Intervall, also $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
Wir zeigen: In (a, b) gibt es $c \in \mathbb{Q}$. Dann gibt es auch in (a, c) ein $d \in \mathbb{Q}$ usw.
Daraus folgt Behauptung.
Sei $b > 0$ (andernfalls betrachte $(-b, -a)$, hier $-a > 0$).
Setze $x = b - a \Longrightarrow x > 0$. Nach Bemerkung oben gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < x$.
Nach (R3) gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $k\frac{1}{n} \geq b$. Sei k die kleinste natürliche Zahl mit
$k\frac{1}{n} \geq b \Longrightarrow (k-1)\frac{1}{n} < b$. Außerdem gilt $(k-1)\frac{1}{n} > a$. Andernfalls
$(k-1)\frac{1}{n} \leq a \Longrightarrow x = b - a < \frac{k}{n} - a < \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n} \Longrightarrow$ Widerspruch
$\Longrightarrow a < \frac{k-1}{n} < b$, setze $c := \frac{k-1}{n} \in \mathbb{Q}$ und $c \in (a, b)$. □

Erinnerung:
Eine Menge M heißt abzählbar unendlich, wenn es eine Bijektion $\mathbb{N} \to M$ gibt.
Andernfalls heißt M überabzählbar (falls M unendlich ist).

Satz 7:
Das abgeschlossene Intervall $[0, 1]$ ist überabzählbar in $\mathbb{R}$.

Beweis:
Angenommen, $A_0 := [0, 1]$ ist abzählbar; sei $x : \mathbb{N} \to A_0$ eine Bijektion.
Die Elemente von A_0 sind also $x_1, x_2, \ldots$
Teile A_0 in die Teilintervalle $\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. x_1 kann nicht in allen Teilintervallen von A_0 liegen.
Sei A_1 ein Teilintervall mit $x_1 \notin A_1$.
Teile A_1 in drei gleiche Teilintervalle, x_2 liegt nicht in allen drei Teilintervallen; wähle A_2 mit $x_2 \notin A_2$; teile A_2 in drei gleiche Teilintervalle und wähle A_3 mit $x_3 \notin A_3$; fortsetzen mit vollständiger Induktion. Man erhält eine Folge abgeschlossener Intervalle

$$[0, 1] = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots, \; x_n \notin A_n \; \forall n \geq 1$$

Wende Axiom (R4) an:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset \Longrightarrow \text{ es existiert } \eta \in \mathbb{R} \text{ mit } \eta \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Es gilt $\eta \in [0,1]$. Also gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $\eta = x_n$. Da $x_n \notin A_n$, aber $\eta \in A_n$ folgt Widerspruch. Also ist $[0,1]$ überabzählbar. □

Folgerung: $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.
Allgemeiner: Jedes Intervall in $\mathbb{R}$ ist überabzählbar (*ÜA*).

1.2 Folgen und Grenzwerte

Definition: Eine Folge reeller Zahlen ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Bezeichnung: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, kürzer (a_n)

Kleine Verallgemeinerung: Folge nur für $n \geq n_0$ definiert, $n_0 \in \mathbb{N}_0$.

Beispiele:
$a_n = c \in \mathbb{R}\ \forall n \geq 1,\ a = (c, c, \ldots)$ (konstante Folge)
(a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}\ \forall n \geq 1$
(a_n) mit $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$ für $n \geq 1$ (rekursiv definierte Folge)
(F_n) mit $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}\ \forall n \geq 1$ (Fibonaccizahlen)

Definition:
Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. (a_n) heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $|a_n - a| < \varepsilon\ \forall n \geq N$.

Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, oder $\lim a_n = a$ oder $a_n \to a$.

Aktuelle Formulierung:
(a_n) konvergiert gegen a, wenn in jeder ε-Umgebung von a fast alle Folgeglieder liegen. *'Fast alle'* heißt *'alle bis auf endlich viele'*.

Definition:
Eine Folge heißt divergent, wenn sie gegen keine reelle Zahl konvergiert.

Beispiele:

1. Sei $a_n = \frac{1}{n}$.
   Behauptung: (a_n) ist konvergent mit Grenzwert 0.

   Beweis:
   Sei $\varepsilon > 0$. Wähle N mit $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt für $n \geq N$
   $$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

2. Sei $a_n = \frac{n}{n+1} \quad \forall n \geq 1$.
   Behauptung: (a_n) konvergiert gegen 1.

   Beweis:
   Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt
   $|a_n - 1| = |\frac{n}{n+1} - 1| = |\frac{-1}{n+1}| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$ falls $n > N$, wobei $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{1}{\varepsilon}$

3. Sei $a_n = \frac{n^2}{2^n}, n \geq 1$.
   Behauptung: $a_n \to 0$; für $n \geq 4$ gilt $n^2 \leq 2^n$ (*ÜA*)
   $\Longrightarrow \frac{n^2}{2^n} \leq 1$ für $n \geq 4 \Longrightarrow \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$, $n \geq 4$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.
   Dann
   $$|a_n - 0| = \frac{n^2}{2^n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ falls } n \geq N, \text{ wobei } N \in \mathbb{N} \text{ mit } N > \frac{1}{\varepsilon}$$

Definition:
Eine Folge (a_n) heißt nach oben (unten) <u>beschränkt</u>, wenn es $M \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \leq M$ $(a_n \geq M)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (a_n) heißt beschränkt, falls (a_n) sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

Satz 8:
Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis:
Sei (a_n) konvergent, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Sei $\varepsilon = 1$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq N$

$$\Longrightarrow |a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \; \forall n \geq N$$

Setze $C = max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|\}$. Dann gilt

$$|a_n| \leq max\{C, 1+|a|\} \Longrightarrow -max\{C, 1+|a|\} \leq a_n \leq max\{C, 1+|a|\}$$

□

Achtung:
Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht! Beispiel: $a_n = (-1)^n$ $(\ddot{U}A)$

Satz 9:
Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

Beweis:
Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$. Angenommen $a \neq b$.
Definiere $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2} \Longrightarrow \varepsilon > 0$.
Da $a_n \to a$ gibt es $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon \; \forall n \geq N_1$.
Da $a_n \to b$ gibt es $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - b| < \varepsilon \; \forall n \geq N_2$.
Setze $N = max\{N_1, N_2\} \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$ und $|a_n - b| < \varepsilon \; \forall n \geq N$
$\Longrightarrow \boldsymbol{|a - b|} = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| \boldsymbol{<} \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \boldsymbol{|a - b|} \; \forall n \geq N$
Widerspruch, da $|a - b| < |a - b|$ unmöglich! Also Annahme $a \neq b$ falsch $\Longrightarrow \underline{a = b}$

□

Satz 10:
Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

(a) Dann ist $(a_n + b_n)$ konvergent mit Grenzwert $a + b$.

(b) $(a_n b_n)$ ist konvergent mit Grenzwert ab.

(c) Sei $b \neq 0$. Dann gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$.
Außerdem ist die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq n_0}$ konvergent mit dem Grenzwert $\frac{a}{b}$.

Beweis:

(a) Sei $\varepsilon > 0$. Da $(a_n), (b_n)$ konvergent, gibt es $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ mit
$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq N_1, |b_1 - b| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq N_2$.
Für $n \geq N = max\{N_1, N_2\}$ gilt dann

$$|a_n+b_n-(a+b)| = |a_n-a+b_n-b| \leq |a_n-a|+|b_n-b| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Also $a_n + b_n \to a + b$.

(b) Zu zeigen: $a_n b_n \to ab$.
Nach Satz 8 ist (a_n) beschränkt $\Longrightarrow$ es existiert $M' > 0$ mit
$|a_n| \leq M'\ \forall n \geq 1$.
Ebenso existiert M'' mit $|b_n| \leq M''\ \forall n \geq 1 \Longrightarrow |a_n| \leq M, |b_n| \leq M\ \forall n \geq 1$
mit $M = max\{M', M''\}$.
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $(a_n), (b_n)$ konvergent, gibt es $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n-a| < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ für } n \geq N_1, |b_n-b| < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ für } n \geq N_2$$

Für $n \geq max\{N_1, N_2\}$ folgt dann:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \\ &\leq |a_n(b_n - b)| + |(a_n - a)b| \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M = \varepsilon \end{aligned}$$

(c) Sei $b \neq 0$. Müssen zuerst zeigen: Es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$.
Da $b \neq 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \frac{1}{2}|b|\ \forall n \geq n_0$.
$\Longrightarrow |b_n| = |b_n-b+b| \geq |b|-|b_n-b| > |b|-\frac{1}{2}|b| = \frac{1}{2}|b| \neq 0 \Longrightarrow b_n \neq 0\ \forall n \geq n_0$.
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben: Dann existiert $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon|b|^2$.
Für $n \geq max\{n_0, N_1\}$ gilt:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right| = \frac{1}{|b_n b|}|b_n-b| < \frac{1}{|b_n b|}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon|b|^2 \leq \frac{1}{|b|}\varepsilon|b| = \varepsilon$$

Also gilt $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$.

Aus Teil (b) folgt: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \frac{1}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ □

Folgerungen:
Sei (a_n) konvergent, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist auch (λa_n) konvergent und $\lambda a_n \to \lambda a$ (Teil (b) mit $b_n = \lambda\ \forall n$).
Ist (b_n) Konstante, so ist $(a_n - b_n)$ konvergent, $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (Teil 1 und 1. Folgerung).

Beispiele:

(a) Sei $a_n = \frac{5n+1}{n^2+2}$, $n \geq 1$. Dann

$$a_n = \frac{\frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2}} \ \forall n \geq 1$$

Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Mehrfache Anwendung von Satz 10 liefert:

$$(a_n) \text{ ist konvergent: } \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

(b) Sei (x_n) gegeben durch $x_n = \frac{-n^3+n^2+5n}{3n+3n^3-4}$ $\forall n \geq 1$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{-1 + \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}}{\frac{3}{n^2} + 3 - \frac{4}{n^3}} = -\frac{1}{3}$$

Satz 11:
Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen reeller Zahlen, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.
Gilt $a_n \leq b_n$ für $n \geq 1$, so ist $a \leq b$.

Beweis:
Angenommen, $b < a \Longrightarrow \varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0$. Existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ und $|b_n - b| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.
$\Longrightarrow a_n > a - \varepsilon, b_n < b + \varepsilon \ \forall b \geq N$
$\Longrightarrow b_n < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2} = a + \frac{a+b}{2} - a = a + \frac{-a+b}{2} = a - \frac{a-b}{2} = a - \varepsilon < a_n$
$\Longrightarrow$ Widerspruch $\Longrightarrow b \geq a$. $\square$

Folgerung:
Ist (a_n) konvergent und gilt $A \leq a_n \leq B$ $\forall n \geq 1$, so gilt auch $A \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq B$.

Definition:
Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt divergent gegen ∞ $(-\infty)$, falls es zu jedem $M > 0$ $(M < 0)$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_n > M$ $(a_n < M)$ für alle $n \geq n_0$.

Schreibweise:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ oder } a_n \to \infty$$
$$\text{bzw. } \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \text{ oder } a_n \to -\infty$$

Beispiele:
$a_n = n^2 - 10n \to \infty$
$b_n = 10^n - n! \to -\infty$ (*ÜA*)

Definition:
Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt Cauchy-Folge (Fundamentalfolge), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \text{ für alle } n, m \geq N$$

Anschaulich: Folgenglieder rücken immer näher zusammen!

Satz 12:
Jede konvergente Folge reeller Zahlen ist eine Cauchy-Folge.

Beweis:
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei (a_n) konvergent mit $a_n \to a$.
Gibt $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq N$.
Für alle $n, m \geq N$ gilt dann

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also ist (a_n) eine Cauchy-Folge. □

Frage: Gilt die Umkehrung auch?
In $\mathbb{Q}$ gibt es Cauchy-Folgen, die nicht konvergent sind!
Beispiel: Betrachte Dezimalbruchentwicklung von $\sqrt{2} = 1,4142...$
Schreibe: $\sqrt{2} = d_0, d_1 d_2 d_3 ...\ \ 0 \leq d_i \leq 9;\ \ i \geq 0$.
Also $d_0 = 1, d_1 = 4, d_2 = 1, d_3 = 4$ usw.
Setze $a_n = d_0, d_1 d_2 d_3 ... d_{n-1},\ \ n \geq 0 \Longrightarrow a_0 = 1, a_1 = \frac{14}{10}, a_2 = \frac{141}{100}, a_3 = \frac{1414}{1000}$ usw.
Klar: $a_n \in \mathbb{Q}\ \forall n \geq 0$. Folge (a_n) rationaler Zahlen.
Außerdem für $n, m \geq N\ \ |a_n - a_m| \leq 10^{-N+1}$
Für gegebenes $\varepsilon > 0$ wähle N so, dass $10^{-N+1} < \varepsilon \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon\ \forall n, m \geq N$.
Mit anderen Worten: (a_n) ist Cauchy-Folge rationaler Zahlen.
Es gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Satz 13:
In $\mathbb{R}$ ist jede Cauchy-Folge konvergent.

Beweis:
Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge reeller Zahlen. Definiere eine Folge $(n_k)_{k \geq 0}$ ganzer Zahlen folgendermaßen durch Induktion:
Sei $n_0 = 1$. Ist $k \geq 0$ und n_k gegeben, so sei n_{k+1} die kleinste ganze Zahl $> n_k$ mit $|a_p - a_q| < \frac{1}{2^{k+2}}$ für alle $p, q \geq n_{k+1}$.
Dies geht immer, da (a_n) Cauchy-Folge.
Sei $I_k = [a_{n_k} - 2^{-k}, a_{n_k} + 2^{-k}]$. Dann gilt nach Definition von n_k:

$$|a_{n_k} - a_{n_{k+1}}| < \frac{1}{2^{k+1}}$$

$\Longrightarrow I_{k+1} \subset I_k$ für alle $k \geq 1$.

Für alle $m \geq n_k$ gilt außerdem:

$$|a_m - a_{n_k}| < \frac{1}{2^{k+1}} \Longrightarrow a_m \in I_k$$

Intervallschachtelungsaxiom (R4): $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset$; sei $a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$, d.h.
$|a - a_m| \leq 2 \cdot 2^{-k} = 2^{-k+1}$ (Länge des Intervalls I_k).
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle k so groß, daß $2^{-k+1} < \varepsilon$ und setze $N = n_k$.
Dann gilt für alle $m \geq N \quad |a - a_m| < \varepsilon$ □

Ein Körper, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert, heißt vollständig.
Also: $\mathbb{R}$ vollständig, $\mathbb{Q}$ nicht vollständig!

Definition:
Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen und (n_k) eine Folge natürlicher Zahlen mit $n_k < n_{k+1}$ für alle $k \geq 1$. Die Folge $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ heißt Teilfolge der Folge (a_n).

Satz 14 (Satz von Bolzano-Weierstraß):
Jede beschränkte Folge reeller Zahlen hat eine konvergente Teilfolge.

Beweis:

(a) Sei die Folge (a_n) beschränkt $\Longrightarrow$ gibt A, B mit $A \leq a_n \leq B$ für alle $n \geq 1$.
Konstruiere Folge von Teilintervallen $[A_k, B_k]$ von $[A, B]$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) In $[A_k, B_k]$ liegen unendlich viele der a_n.

(2) $[A_k, B_k] \subseteq [A_{k-1}, B_{k-1}]$

(3) $B_k - A_k = 2^{-k}(B - A)$

Setze dazu $[A_0, B_0] = [A, B] \quad (k = 0)$
Dann hat $[A_0, B_0]$ die Eigenschaften $(1), (2), (3)$.
Sei $k \geq 0$ und angenommen, $[A_k, B_k]$ erfüllt $(1), (2), (3)$. Setze dann
$M = \frac{1}{2}(A_k + B_k)$. Nach (1) enthält $[A_k, B_k]$ unendlich viele der a_n
$\Longrightarrow [A_k, M]$ oder $[M, B_k]$ enthält unendlich viele der a_n.
Also $[A_{k+1}, B_{k+1}] := [A_k, M]$ im ersten Fall und $[A_{k+1}, B_{k+1}] := [M, B_k]$ im zweiten Fall.

(b) Definiere Teilfolge von (a_n): $a_{n_0} = a_0 \in [A_0, B_0]$. Sei $k \geq 0$. In $[A_{k+1}, B_{k+1}]$ liegen unendlich viele a_n, wähle also $a_{n_{k+1}} \in [A_{k+1}, B_{k+1}]$ beliebig mit $n_{k+1} > n_k$.

(c) $(a_{n_k})_{k\geq 0}$ ist Cauchy-Folge: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle N mit $2^{-N}(B - A) < \varepsilon$.
Dann gilt für $K_{ij} \geq N$:

$$a_{n_k} \in [A_k, B_k] \subseteq [A_N, B_N], a_{n_j} \in [A_j, B_j] \subseteq [A_N, B_N]$$
$$\Longrightarrow |a_{n_k} - a_{n_j}| \leq B_N - A_N = 2^{-N}(B - A) < \varepsilon \; \forall K_{ij} \geq N$$
$$\Longrightarrow (a_{n_k}) \text{ ist Cauchy-Folge } \Longrightarrow (a_{n_k}) \text{ ist konvergent}$$

□

Definition:
Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen, $a \in \mathbb{R}$. Dann heißt a Häufungspunkt von (a_n), wenn es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen a konvergiert.

Beispiele:

(1) $a_n = (-1)^n, n \geq 1$. Hat Häufungspunkte 1 und -1. Es gilt $a_{2n} = 1 \to 1$, $a_{2n+1} = -1 \to -1$

(2) $a_n = \frac{1}{n} + (-1)^n, n \geq 1$. Häufungspunkte 1 und -1, denn $a_{2n} = \frac{1}{2n} + 1 \to 1, a_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} - 1 \to -1$.

Definition:
Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Dann heißt (a_n)

(1) <u>Monoton wachsend</u> (streng monoton wachsend), falls $a_n \leq a_{n+1}$ $(a_n < a_{n+1})$ $\forall n \geq 1$

(2) <u>Monoton fallend</u> (streng monoton fallend), falls $a_n \geq a_{n+1}$ $(a_n > a_{n+1})$ $\forall n \geq 1$

(3) <u>Monoton</u>, falls (a_n) monoton fallend oder monoton wachsend ist.

Satz 15:
Jede beschränkte und monotone Folge ist konvergent.

Beweis:
Sei (a_n) beschränkt und monoton $\Longrightarrow$ (a_n) hat konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ nach Bolzano-Weierstraß. Sei $a := \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$
Behauptung:
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da (a_{n_k}) konvergent ist, gibt es $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_k}| < \varepsilon$ $\forall k \geq k_0$. Setze $N = n_{k_0}$. Für jedes $n \geq N$ gibt es $k \geq k_0$ mit $n_k \leq n \leq n_{k+1}$.
Ist (a_n) monoton fallend, so folgt $a_{n_k} \geq a_n \geq a_{n_{k+1}}$
Ist (a_n) monoton wachsend, so folgt $a_{n_k} \leq a_n \leq a_{n_{k+1}}$
Im ersten Fall $|a_n - a| \leq |a_{n_k} - a|$
Im zweiten Fall $|a_n - a| \leq |a_{n_k} - a|$
Also gilt für alle $n \geq N$: $|a_n - a| \leq |a_{n_k} - a| < \varepsilon$, da a_{n_k} konvergent ist. □

Definition:
Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen. Definiere eine neue Folge $(s_n)_{n\geq 0}$ durch $s_n = \sum_{i=0}^n a_i$ (n-te Partialsumme). Die Folge $(s_n)_{n\geq 0}$ heißt <u>unendliche Reihe</u>; Bezeichnung: $\sum_{i=0}^\infty a_i$. Die unendliche Reihe heißt konvergent, wenn $(s_n)_{n\geq 0}$ konvergent ist. Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, so setze $\sum_{i=0}^\infty a_i := s$.

Beispiel:
Sei $x \in \mathbb{R}, a_i = x^i$ für alle $i \geq 0$. Für die Partialsumme gilt

$$s_n = \sum_{i=0}^n a_i = \sum_{i=0}^n x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \text{ (falls } x \neq 1\text{) (Beweis durch Induktion)}$$

Sei $|x| < 1$. Nach Aufgabe I, 3(b) gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$. Also folgt

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}-1}{x-1} = \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x} \text{ falls } |x| < 1 (\underline{\text{geometrische Reihe}})$$

$$\text{z.B. } x = \frac{1}{2};\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$x = -\frac{1}{2};\ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ Folge und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent $\iff (s_n)_{n\geq 0}$ ist Cauchy-Folge
$\implies |s_n - s_m| < \varepsilon\ \forall n, m \geq N$ für gegebenes $\varepsilon > 0$
$\implies s_n - s_m = \sum_{k=m+1}^{n} a_k \implies |\sum_{k=m+1}^{n} a_k| < \varepsilon$

Definition:
<u>Konvergenzkriterium</u>: Die unendliche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist genau dann konvergent, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $|\sum_{k=m+1}^{n} a_k| < \varepsilon\ \forall m, n \geq N$.
Spezialfall: $n = m+1 \implies |a_{m+1}| < \varepsilon\ \forall m \geq N \implies \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Satz:
Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, so ist (a_n) eine Nullfolge.
Umkehrung falsch: Wenn $a_n \to 0$, so folgt <u>nicht</u> $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent!

Beispiel:
Sei $a = \frac{1}{n}, n \geq 1$. Dann gilt:
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, aber $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent (<u>harmonische Reihe</u>).

Beweis:
Betrachte Partialsummen s_{2^k} für $k \geq 1$
$s_2 = 1 + \frac{1}{2}, s_4 = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{2}{2}$
$s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) \geq 1 + \frac{2}{2} + \frac{4}{8} = 1 + \frac{3}{2}$
Induktion zeigt: $s_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$ für $k \geq 1$
Also $s_{2^k} \to \infty \implies (s_n)_{n\geq 1}$ nicht konvergent. □

Satz 16 (Satz von <u>Leibniz</u>):
Sei (a_n) monoton fallend, $a_n \geq 0\ \forall n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergent (<u>alternierende Reihe</u>).

Beweis:
Sei $s_k = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n a_n$. Dann $s_{2k+2} - s_{2k} = -a_{2k+1} + a_{2k+2} \leq 0 \implies s_{2k+2} \leq s_{2k+1}$.
$\implies$ Die Teilfolge $(s_{2k})_{k\geq 0}$ ist monoton fallend.

Analog:
$s_{2k+3} - s_{2k+1} = a_{2k+2} - a_{2k+3} \geq 0 \Longrightarrow s_{2k+3} \geq s_{2k+1}$
$\Longrightarrow$ Die Teilfolge $(s_{2k+1})_{k\geq 0}$ ist monoton wachsend.
$s_1 \leq s_3 \leq ... \leq s_{2k+3} \leq ...$
Außerdem $s_{2k+1} - s_{2k} = -a_{2k+1} \leq 0 \Longrightarrow s_{2k+1} \leq s_{2k}\ \forall k \geq 0$
$\Longrightarrow s_{2k} \geq s_{2k+1} \geq ... \geq s_3 \geq s_1 \Longrightarrow (s_{2k})$ ist beschränkt.
Bolzano-Weierstraß: $(s_{2k})_{k\geq 0}$ konvergent. Setze $S := \lim\limits_{k\to\infty} s_{2k}$
Analoge Rechnung: $(s_{2k+1})_{k\geq 0}$ beschränkt $\Longrightarrow (s_{2k+1})$ konvergent.
Setze $\overline{S} = \lim\limits_{k\to\infty} s_{2k+1}$
Es ist $S - \overline{S} = \lim\limits_{k\to\infty} s_{2k} - \lim\limits_{k\to\infty} s_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} (s_{2k} - s_{2k+1})$ (Satz 10(b), 2. Folge)
$= \lim\limits_{k\to\infty} (-a_{2k+1}) = 0 \Longrightarrow S = \overline{S}$
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben Es gibt $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ mit $|s_{2k} - S| < \varepsilon\ \forall k \geq N_1$,
$|s_{2k+1} - S| < \varepsilon\ \forall k \geq N_2$.
Setze $N = max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$. Dann gilt für alle $n\ \geq N$: $|s_n - S| < \varepsilon$ □

Beispiele: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ konvergent (nach Leibniz), $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ konvergent.

Definition:
Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.

Satz 17:
Ist eine Reihe absolut konvergent, so ist sie auch konvergent.

Beweis:
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Es existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon\ \forall n, m \geq N$ (nach Konvergenzkriterium oben)
$\Longrightarrow |\sum_{k=m}^{n} a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon\ \forall n, m \geq N \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist konvergent. □

Satz 18 (Majorantenkriterium):
Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent, $c_n \geq 0\ \forall n$
Ist (a_n) Folge mit $|a_n| \leq c_n\ \forall n$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Beweis:
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Es existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=m}^{n} c_k = |\sum_{k=m}^{n} c_k| < \varepsilon\ \forall n, m \geq N$
$\Longrightarrow \sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} c_k \leq \varepsilon\ \forall n, m \geq N$ □

Beispiel: Sei $r \in \mathbb{N}$ und betrachte $S_r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$

r=1: harmonische Reihe, divergent

$r \geq 2$: Dann gilt: $\frac{1}{n^r} \leq \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n+1} = \frac{2}{n(n+1)}$ Nach ÜA 2.1 ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergent. Aus Majorantenkriterium folgt S_r konvergent für $r \geq 2$.

Bemerkung: $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $S_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

Divergenzkriterium: Ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ divergent, $c_n \geq 0\ \forall n$ und gilt $a_n \geq c_n\ \forall n$, so ist auch Σa_n divergent.

Beispiel: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ ist divergent. Hier gilt $\frac{1}{2n+1} \geq \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1}$, also Behauptung aus Divergenz der harmonischen Reihe.

Satz 19 (Quotientenkriterium):
Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ Reihe mit $a_n \neq 0$ für $n \geq n_0$. Sei $\Theta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \Theta < 1$ und $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq \Theta \ \forall n \geq n_0$.
Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Beweis:
O.B.d.A. $n_0 = 0 \Longrightarrow |\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq \Theta \ \forall n \geq 0 \Longrightarrow |a_n| = |\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_1}{a_0} \cdot a_0| \leq \Theta^n |a_0|$.
Da $0 < \Theta < 1$ folgt $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \Theta^n |a_0| = \frac{|a_0|}{1-\Theta}$ also konvergent. □

Beispiele:

(1) $a_n = \frac{n^2}{2^n}$. Für $n \geq n_0 = 3$ gilt:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1} n^2} = \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} < 1$$

Also ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ konvergent.

(2) $a_n = \frac{1}{n}$. Für alle $n \geq 1$ gilt $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{n}{n+1} < 1$. Aber $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert!
Quotientenkriterium <u>nicht</u> anwendbar, da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

1.3 Exponentialfunktion und Logarithmus

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen, $x \in \mathbb{R}$.
Eine Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ heißt Potenzreihe.
Sei $a_n = \frac{1}{n!}$. Dann definiere man

$$exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{Exponentialreihe}$$

Satz 20:
Die Exponentialreihe konvergiert absolut für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis:
Benutze Quotientenkriterium mit $a_n = \frac{x^n}{n!}$
Es gilt für $x \neq 0$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \left|\frac{x^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1}$$

Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq 2|x|$. Für $n \geq n_0$ gilt dann:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \leq \frac{|x|}{n_0+1} \leq \frac{|x|}{2|x|} = \frac{1}{2}$$

Also folgt Behauptung aus Satz 19.

Folgerung:
Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist auch $exp(x) \in \mathbb{R}$.
Also wird durch die Zuordnung $x \mapsto exp(x)$ eine Funktion definiert, die Exponentialfunktion.

Spezialfälle: $exp(0) = 1$; $exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} =: e$ (Eulersche Zahl)

Cauchy-Produkt von Reihen:
Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen.
Für $n \geq 0$ definiere man c_n mit

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Dann ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

Beweis: siehe Literatur

Definition:
Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$; setze $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (Binomialkoeffizient).

Satz:
$x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Beweis: *ÜA*

Satz 21:
Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $exp(x+y) = exp(x) \cdot exp(y)$.

Beweis:
Benutze Cauchy-Produkt für die absolut konvergenten Reihen.

$$exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ und } exp(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$$

Dann gilt mit $a_k = \frac{x^k}{k!}$ und $b_k = \frac{y^k}{k!}$:

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!}(x+y)^n \;\forall\, n \geq 0 \\ &\Longrightarrow exp(x) \cdot exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = exp(x+y) \end{aligned}$$

□

Sei $x \in \mathbb{R}$. Definiere die logarithmische Reihe durch

$$log(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot x^k$$

Satz 22:
Die Reihe $log(x)$ konvergiert absolut für $|x| < 1$.

Beweis: Quotientenkriterium

Folgerung:
Also wird Funktion $log : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definiert als Logarithmusfunktion.

Einige Eigenschaften:
$log(xy) = log(x) + log(y), \; |x| < 1, |y| < 1$
$exp \circ log = log \circ exp = id$

Kapitel 2

Stetige Funktionen

2.1 Grundbegriffe

Im folgenden werden Teilmengen D von $\mathbb{R}$ betrachtet. D heißt nach oben (unten) beschränkt, falls es $M \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \leq M$ $(x \geq M)$ $\forall x \in D$. M heißt dann obere (untere) Schranke von D.
D heißt beschränkt, wenn D nach oben und nach unten beschränkt ist
$\Longrightarrow$ es existiert $M \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq M$ $\forall x \in D$.

Definition:
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. $k \in \mathbb{R}$ heißt Supremum von D $(sup(D))$, falls gilt:

1) k ist obere Schranke von D.
2) Ist $k' < k$, so ist k' keine obere Schranke von D.

Mit anderen Worten: k ist kleinste obere Schranke von D.

k heißt Infimum von D $(inf(D))$, falls gilt:

1) k ist untere Schranke von D.
2) Ist $k' > k$, so ist k' keine untere Schranke von D.

Mit anderen Worten: k ist größte untere Schranke von D.

Satz 1:
Jede nicht-leere nach oben (unten) beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum (Infimum).

Beweis: Folgt aus Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ (siehe Literatur).

$$\text{Wir setzen } sup(D) = \infty, \text{ falls D nicht nach oben beschränkt ist.}$$
$$inf(D) = -\infty, \text{ falls D nicht nach unten beschränkt ist.}$$

Beispiele:

(1) $D = [a, b]$ abgeschlossenes Intervall.
Dann $sup(D) = b$, $inf(D) = a$.

(2) $D = (a, b)$ offenes Intervall.
Dann $sup(D) = b,\ inf(D) = a$.

Beweis: Es gilt $x \leq b\ \forall x \in D \Longrightarrow b$ ist obere Schranke von D. Angenommen, $b' < b$ und b' ist obere Schranke von D. Setze $x = \frac{b+b'}{2}$ falls $b' \geq a$ und $x = \frac{a+b}{2}$ sonst $\Longrightarrow x \in D$ und $x > b' \Longrightarrow$ Widerspruch.
Analog für Infimum.

(3) $D = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\},\ sup(D) = 1,\ inf(D) = 0$

(4) $D = \{n | n \in \mathbb{N}\},\ inf(D) = 1,\ sup(D) = \infty$

Definition:
Falls $sup(D) \in D$, so heißt $sup(D)$ auch Maximum von D.
Falls $inf(D) \in D$, so heißt $inf(D)$ auch Minimum von D.

Sei (a_n) Folge reeller Zahlen. Definiere eine neue Folge (s_n) durch $s_n = sup\{a_k | k \geq n\}$ und Folge (t_n) durch $t_n = inf\{a_k | k \geq n\}$.
Dann ist (s_n) monoton fallend, (t_n) monoton wachsend.

Setze $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n := \lim_{n\to\infty} s_n$ limes superior von (a_n)

$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n := \lim_{n\to\infty} t_n$ limes inferior von (a_n)

Beispiele:

1) Sei $a_n = n\ \forall n$, dann $s_n = \infty,\ t_n = n \Longrightarrow \overline{lim}\ a_n = \infty = \underline{lim}\ a_n$

2) $a_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})\ \forall n \geq 1$. Dann

$$s_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & 2 \mid n \\ 1 + \frac{1}{n+1} & 2 \nmid n \end{cases} \qquad t_n = \begin{cases} -(1 + \frac{1}{n}) & 2 \nmid n \\ -(1 + \frac{1}{n+1}) & 2 \mid n \end{cases}$$

$\Longrightarrow \overline{lim}\ a_n = 1, \quad \underline{lim}\ a_n = -1$

Zusammenhang mit Konvergenz:
Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen $a \in \mathbb{R}$, falls $\lim_{n\to\infty} sup\ a_n = a = \lim_{n\to\infty} inf\ a_n$.

Definition:
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Dann heißt a Häufungspunkt von D, falls es $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt mit $a_n \in D$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Die Menge aller Häufungspunkte von D heißt Abschluss von D.
Bezeichnung: $\overline{D}$

Beispiele:

(1) $a \in D$ ist Häufungspunkt von D. Setze $a_n = a\ \forall n \geq 1$.

(2) $D = (0, 1)$. Dann ist 0 Häufungspunkt von D.
Setze $a_n = \frac{1}{n}\ \forall n \geq 1 \Longrightarrow a_n \in D\ \forall n$ und $lim\ a_n = 0$.
Folgerung: $\overline{D} = [0, 1]$

2.1.1 Funktionen und Grenzwerte

Sei $D \subseteq \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$ und a sei Häufungspunkt von D.
Wir setzen $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$, falls für jede Folge (x_n) mit $x_n \to a$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$.
Kurzschreibweise: $f(x) \to c$ falls $x \to a$.

Beispiele:

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} exp(x) = 1$
Beweis: Nach ÜA III.3 gilt mit $n = 0$:

$$|R_0(x)| = |exp(x) - 1| \leq 2|x| \text{ falls } |x| \leq 1$$

Sei (x_n) Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n| < 1 \; \forall n \geq N$
$\Longrightarrow |exp(x_n) - 1| \leq 2|x_n| \; \forall n \geq N \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |exp(x_n) - 1| = 0$
$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} exp(x_n) = 1$ $\square$

Definition:
Oberer Grenzwert: Wir setzen $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x) = c$, falls für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D, \underline{x_n > a}$ und $lim\ x_n = a$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

Unterer Grenzwert: Wir setzen $\lim\limits_{x \uparrow a} f(x) = c$, falls für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D, \underline{x_n < a}$ und $lim\ x_n = a$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

Es gilt: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\uparrow a} f(x) = c = \lim\limits_{x\downarrow a} f(x)$

Beispiele:

(1) $D = \mathbb{R}, f(x) = [x]$
$\lim\limits_{x\uparrow 2} f(x) = 1$ aber $\lim\limits_{x\downarrow 2} f(x) = 2$

(2) $f(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ k \in \mathbb{N},\ a_0, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$
Falls x gross genug ist gilt:

$$f(x) = x^k \left(1 + \frac{a_{k-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{k-1}} + \frac{a_0}{x^k}\right) \geq x^k \cdot \frac{1}{2}$$

Ist (x_n) Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \infty$, so gilt
$f(x_n) \geq \frac{1}{2} x_n^k \geq \frac{1}{2} x_n \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$ (Uneigentlicher Grenzwert).
ÜA: Wie verhält sich $f(x)$ für $x \to -\infty$?

Definition:
$f : D \to \mathbb{R},\ a \in D$. f heißt stetig in a, falls $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$
(kurz $f(x) \to f(a)$ für $x \to a$).

Beispiele:

(1) $f(x) = c \; \forall x \in \mathbb{R}$ stetig für alle $a \in \mathbb{R}$.

(2) $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ stetig in allen $a \in \mathbb{R}$.

Beweis:
Müssen zeigen: Gilt $\lim\limits_{x\to a} exp(x) = exp(a) \; \forall a \in \mathbb{R}$.
Sei (x_n) Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = 0$
$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} exp(x_n - a) = 1$ nach Beispiel vorher
$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} exp(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(exp(a)\cdot exp(x_n - a))$
$= exp(a) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} exp(x_n - a) = exp(a)$ $\square$

(3) Polynome sind stetig auf $\mathbb{R}$.

Satz 2:
$f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in D,\; \lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch
$f + g : D \to \mathbb{R},\; fg : D \to \mathbb{R},\; \lambda f : D \to \mathbb{R}$ stetig in a.
Ist $D' = \{x \in D | g(x) \neq 0\}$ und $a \in D'$, so ist auch $\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R}$ stetig in a.

Beweis: *ÜA*

Satz 3:
$f : D \to \mathbb{R},\; g : E \to \mathbb{R},\; f(D) \subseteq E$. Sei f stetig in $a \in D,\; g$ stetig in
$b := f(a) \in E$. Dann ist auch $g \circ f$ stetig in a.

Beweis:
Sei $(x_n) \subseteq D$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Longrightarrow f(x_n) \to f(a)$ für $n \to \infty$.
Setze $y_n := f(x_n) \Longrightarrow (y_n)$ ist Folge in E. Außerdem $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.
g stetig in $b \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} g(y_n) = g(b)$. Also
$\lim\limits_{n\to\infty}(g \circ f)(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} g(y_n) = g(b) = g(f(a)) = (g \circ f)(a)$
$\Longrightarrow g \circ f$ stetig in a. $\square$

2.2 Sätze über stetige Funktionen

Satz 4 (Zwischenwertsatz):
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) < 0,\ f(b) > 0$. Dann gibt es $p \in [a,b]$ mit $f(p) = 0$.

Beweis:
Definiere Folge $[a_n, b_n] \subseteq [a,b]$ mit

(1) $[a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}], n \geq 1$

(2) $b_n - a_n = 2^{-n}(b-a)$

(3) $f(a_n) \leq 0, f(b_n) \geq 0$

Setze $[a_0, b_0] = [a,b]$. Die Eigenschaften (1), (2), (3) sind erfüllt.
Gelte (1), (2), (3) für $[a_n, b_n]$. Setze $m := \frac{1}{2}(a_n + b_n)$.

Fall I) $f(m) \geq 0$; $[a_{n+1}, b_{n+1}] := [a_n, m]$ (linke Hälfte)
II) $f(m) < 0$; $[a_{n+1}, b_{n+1}] := [m, b_n]$ (rechte Hälfte)

Also gelten (1), (2), (3) auch für $[a_{n+1}, b_{n+1}]$.
Es gilt:

Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ist monoton wachsend und beschränkt.
Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ist monoton fallend und beschränkt.

Nach Bolzano-Weierstraß (Satz I.14) sind die Folgen konvergent.

Aus Eigenschaft (2) folgt:
$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n =: p$
f stetig $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(p) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$. Aus Eigenschaft (3) folgt:
$f(p) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$ und $f(p) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0 \Longrightarrow f(p) = 0$ □

Definition:
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt, wenn es ein $k > 0$ gibt mit $|f(x)| \leq k$ für alle $x \in D$.

Satz 5:
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und stetig. Dann hat f ein Maximum und ein Minimum auf $[a,b]$.

Beweis:
Nur für Maximum (für Minimum betrachte $-f$ statt f).
Sei $A := sup\{f(x) | x \in [a,b]\}$. Nach Definition des Supremums gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in [a,b]$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Andererseits ist die Folge (x_n) beschränkt.

Bolzano-Weierstraß: (x_n) hat konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\geq 1}$. Setze $p := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$.
f ist stetig $\Longrightarrow f(p) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = A$ □

Satz 6:
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ und $p \in D$. Es gilt:

$$f \text{ ist stetig in } p \iff \text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ gibt es } \delta > 0 \text{ mit } |f(x) - f(p)| < \varepsilon, \text{ falls } |x - p| < \delta.$$

Beweis:

(1) Für alle $\varepsilon > 0$ gebe es $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ falls $|x - p| < \delta$.
Müssen zeigen: Für jede Folge $(x_n) \subseteq D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(p)$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, δ wie in Voraussetzung.
Es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - p| < \delta$ für alle $n \geq N$
$\Longrightarrow |f(x_n) - f(p)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, also $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(p)$
$\Longrightarrow f$ stetig in p.

(2) Für jede Folge $(x_n) \subseteq D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$ gelte $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(p)$.
Zu zeigen: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$, falls $|x - p| < \delta$.
Angenommen, dies ist falsch. Dann gibt es $\varepsilon > 0$, so daß kein δ existiert mit diesen Eigenschaften, d.h. es gibt mindestens ein $x \in D$ mit $|x - p| < \delta$ aber $|f(x) - f(p)| \geq \varepsilon$. Insbesondere gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in D$ mit

$$|x_n - p| \leq \frac{1}{n} \text{ und } |f(x_n) - f(p)| \geq \varepsilon$$

$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(p)$, da f stetig nach Voraussetzung.
$\Longrightarrow$ Widerspruch zu $|f(x_n) - f(p)| \geq \varepsilon$. Also ist die Annahme falsch. □

Definition:
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt <u>gleichmäßig stetig</u> in D, falls gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $\sigma > 0$ mit $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ für $|x - x'| < \sigma$.

Falls f gleichmäßig stetig in D, so ist f stetig in allen $p \in D$.

<u>Umkehrung falsch:</u> Sei $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.
Sei $p \in (0,1]$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Setze $\sigma = min\{\frac{p}{2}, \frac{p^2\varepsilon}{2}\}$. Für x mit $|x - p| < \sigma$ gilt:

$$|f(x) - f(p)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{p}\right| = \left|\frac{x-p}{xp}\right| \leq \frac{2|x-p|}{p^2} < \frac{2\sigma}{p^2} \leq \varepsilon$$

Also ist f stetig in p. Aber f ist <u>nicht</u> gleichmäßig stetig.
Angenommen, f wäre gleichmäßig stetig. Dann gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $\sigma > 0$ mit $|f(x) - f(x')| < 1$ falls $|x - x'| < \sigma$ für alle $x, x' \in (0,1]$.
Aber es gibt $n \geq 1$ mit

$$\Big|\underbrace{\frac{1}{n}}_{x} - \underbrace{\frac{1}{2n}}_{x'}\Big| < \sigma \text{ und } \left|f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{2n}\right)\right| = |n - 2n| = n = 1$$

Also ist f <u>nicht</u> gleichmäßig stetig.

Satz 7:
Jede auf einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall $[a, b]$ stetige Funktion ist dort gleichmäßig stetig.

Beweis: Angenommen, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit: Für $n \geq 1$ gibt es $x_n, x'_n \in [a, b]$ mit $|x_n - x'_n| < \sigma$ und $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$. Mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat (x_n) eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\geq 1}$.
Setze $p := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \Longrightarrow p \in [a, b]$
Gilt $|x_{n_k} - x'_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \Longrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x'_{n_k} = p$. f stetig
$\Longrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} (f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})) = f(p) - f(p) = 0$
$\Longrightarrow$ Widerspruch zu $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$.
Also ist die Annahme falsch und f ist doch gleichmäßig stetig. □

Definition:
Seien $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt <u>Treppenfunktion</u>, wenn es eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ gibt und Konstanten $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) = c_k$ für $x \in (t_{k-1}, t_k),\ 1 \leq k \leq n$.

Satz 8:
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)\ \forall x \in [a, b]$

(2) $|\varphi(x) - \psi(x)| \leq \varepsilon\ \forall x \in [a, b]$

Jede stetige Funktion auf $[a, b]$ kann also beliebig genau durch Treppenfunktionen approximiert werden.

Beweis: Übungsaufgabe in Literatur

Definition:
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt <u>monoton wachsend</u> (<u>fallend</u>), falls aus $x, x' \in D$ und $x < x'$ folgt, daß $f(x) \leq f(x') \quad (f(x) \geq f(x'))$, streng monoton wachsend (fallend), falls $f(x) < f(x') \quad (f(x) > f(x'))$.

Satz 9:
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend (fallend). Man setze $A := f(a),\ B := f(b)$.
Dann ist $f : [a, b] \to [A, B]$ $(f : [a, b] \to [B, A])$ eine Bijektion und die Umkehrfunktion $f^{-1} : [A, B] \to [a, b]$ $(f^{-1} : [B, A] \to [a, b])$ ebenfalls stetig und streng monoton wachsend (fallend).

Beweis:
Sei f streng monoton wachsend (analoger Beweis für fallend). Dann folgt aus $a < x < b$ auch $f(a) = A < f(x) < B = f(b) \Longrightarrow f$ bildet $[a, b]$ in $[A, B]$ ab. Aus $x < x'$ folgt $f(x) < f(x') \Longrightarrow f$ ist injektiv (sonst gäbe es $x \neq x'$ mit $f(x) = f(x') \Longrightarrow$ Widerspruch zur strengen Monotonie.)

Zwischenwertsatz: Für $c \in [A, B]$ gibt es $x \in [a, b]$ mit $f(x) = c \Longrightarrow f$ ist surjektiv $\Longrightarrow f$ ist bijektiv.
Also existiert $f^{-1} : [A, B] \to [a, b]$ und f^{-1} ist ebenfalls bijektiv.

Beachte: $f^{-1}(f(x)) = x$; also folgt aus $f(x) < f(x')$ auch $x < x'$ (sonst wäre $x \geq x' \Longrightarrow f(x) \geq f(x') \Longrightarrow$ Widerspruch $\Longrightarrow f^{-1}$ streng monoton wachsend).

Noch zu zeigen: f^{-1} ist stetig.
Dazu ist zu zeigen: Ist $(y_n) \subseteq [A, B]$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in [A, B]$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y)$.
Angenommen, dies sei falsch. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit $|f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)| \geq \varepsilon$ für unendlich viele $n \Longrightarrow$ es existiert eine Teilfolge $(y_{n_k})_{k\geq 1}$ mit $|f^{-1}(y_{n_k}) - f^{-1}(y)| \geq \varepsilon \; \forall k \geq 1$.
Gilt $f^{-1}(y_{n_k}) \in [a, b] \Longrightarrow (f^{-1}(y_{n_k}))_{k\geq 1}$ ist beschränkt.

Bolzano-Weierstraß: $(f^{-1}(y_{n_k}))_{k\geq 1}$ hat konvergente Teilfolge. O.B.d.A. sei $(f^{-1}(y_{n_k}))_{k\geq 1}$ bereits konvergent. Setze $c = \lim\limits_{k\to\infty} f^{-1}(y_{n_k})$. Nach Satz I.11 gilt $|c - f^{-1}(y)| \geq \varepsilon$.
Gilt $f(f^{-1}(y_{n_k})) = y_{n_k}$ und da f stetig ist, folgt

$$y = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f(f^{-1}(y_{n_k})) = f(c),$$

denn$f^{-1}(y_{n_k}) \to c \Longrightarrow f^{-1}(y) = f^{-1}(f(c)) = c$
$\Longrightarrow$ Widerspruch zu $|c - f^{-1}(y)| \geq \varepsilon$.
Also Annahme falsch $\Longrightarrow f^{-1}$ stetig. □

Anwendung dieser Sätze zur Konstruktion neuer Funktionen.

Satz 10:
Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, definiert durch $f(x) = x^k$ stetig, streng monoton wachsend und eine Bijektion. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ist ebenfalls stetig, streng monoton wachsend und bijektiv. Sie wird als <u>k-Wurzel</u> bezeichnet.

Schreibweise: $f^{-1}(x) := \sqrt[k]{x}$.

Beweis:
f ist stetig und streng monoton wachsend. ✓
f ist bijektiv nach Satz 9. ✓
Dann existiert auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, die nach Satz 9 stetig, streng monoton wachsend und bijektiv ist.
(Betrachte dazu $f : (0, t] \to (0, t^k] \; \forall t > 0$ in Satz 9). □

Satz 11:
Die Funktion $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ist stetig, streng monoton wachsend und bijektiv. Die Umkehrfunktion $exp^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ wird mit log (oder ln) bezeichnet und heißt natürlicher Logarithmus.
Die Funktion log ist ebenfalls stetig, streng monoton wachsend und bijektiv.
Es gilt:

$$log(xy) = log(x) + log(y) \ \forall x, y > 0$$

Beweis:
Wir wissen, exp ist stetig und $exp(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.
Sei $x > 0$. Dann gilt $exp(x) \geq 1 + x > 1$. Für $x < x'$ gilt dann

$$exp(x') = exp(x + x' - x) = exp(x) \cdot exp(x' - x) > exp(x)$$

$\Longrightarrow exp$ ist streng monoton wachsend.
Wir wissen nach Aufgabe III.2(c):

$$\lim_{x \to \infty} exp(x) = \infty, \ \lim_{x \to -\infty} exp(x) = 0$$

Nach Satz 9 ist $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ eine Bijektion. Folgt weiter: Umkehrfunktion $log := exp^{-1}$ ist stetig, streng monoton wachsend, $log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ bijektiv.
Sei $exp(a) = x$ und $exp(b) = y \Longrightarrow a = log(x), \ b = log(y)$.
Dann gilt:

$$exp(a + b) = exp(a) \cdot exp(b) = x \cdot y$$

$\Longrightarrow log(xy) = log(exp(a + b)) = a + b = log(x) + log(y)$. □

Definition:
Sei $a > 0$ eine fest gewählte reelle Zahl. Die Exponentialfunktion zur Basis a ist definiert durch $exp_a(x) := exp(x \cdot log(a)) \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Satz 12:
Die Funktion $exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ist stetig und es gilt:

(a) $exp_a(x + y) = exp_a(x) \cdot exp_a(y) \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

(b) $exp_a(n) = a^n \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

(c) $exp_a(\frac{p}{q}) = \sqrt[q]{a^p} \ \forall p \in \mathbb{Z}, \ q \in \mathbb{N}$.

Beweis:
$exp_a = g \circ f$ mit $f(x) = x \cdot log(a)$, $g(y) = exp(y)$, stetig nach Satz 3.

(a) folgt aus Funktionalgleichung von exp.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$. Induktion zeigt: $exp_a(nx) = exp_a(x)^n \ \forall n \in \mathbb{N}_0$.
$x > 1 \Longrightarrow exp_a(n) = (exp_a(1))^n = (exp(log(a)))^n = a^n \ \forall n \in \mathbb{N}_0$.
$exp_a(-1) = exp(-log(a)) = \frac{1}{exp(log(a))} = \frac{1}{a}$
$\Longrightarrow exp_a(-n) = exp_a(-1 \cdot n) = (exp_a(-1))^n = (\frac{1}{a})^n = a^{-n}$.
Also gilt (b).

(c) $a^p = exp_a(p) = exp_a(q\frac{p}{q}) = (exp_a(\frac{p}{q}))^q$
$\Longrightarrow \sqrt[q]{a^p} = exp_a(\frac{p}{q})$ $\square$

Schreibweise:
$a^x := exp(x \cdot log(a))$ (für festes $a > 0$) <u>Potenzfunktion</u> zur Basis a.
Mit $a = e$ (Eulersche Zahl):

$$exp(1) = e \Longrightarrow log(e) = 1$$

$$\Longrightarrow e^x = exp(x \cdot log(e)) = exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Wichtige Grenzwerte:

Satz 13:

(a) Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty,\ \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0$.

(b) $\lim\limits_{x\downarrow 0} log(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty} log(x) = \infty$

(c) $\lim\limits_{x\downarrow 0} x^\alpha = 0,\ \lim\limits_{x\downarrow 0} x^{-\alpha} = \infty$ ($\alpha > 0$ reell)

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{log(x)}{x^\alpha} = 0$ ($\alpha > 0$ reell)

Beweis:

(a) $e^x = exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$, falls $x > 0$
$\Longrightarrow \frac{e^x}{x^k} > \frac{x}{(k+1)!} \to \infty$, falls $x \to \infty$.

(b) $log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ stetig, bijektiv, streng monoton steigend
$\Longrightarrow log(x) \to \infty$ für $x \to \infty$. Ist $0 < x < 1$, so ist $\frac{1}{x} > 1$.
Beachte: $\log(\frac{1}{x} \cdot x) = log(\frac{1}{x}) + log(x) = 0$
$\Longrightarrow log(\frac{1}{x}) = -log(x) \Longrightarrow \lim\limits_{x\downarrow 0} log(\frac{1}{x}) = \infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\downarrow 0} log(x) = -\infty$

(c) Sei (x_n) Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha\ log(x_n) = \infty$.
Sei $y_n = \alpha\ log(x_n) \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Wir wissen:
$x_n^\alpha = exp(\alpha\ log(x_n)) = exp(y_n) = e^{y_n} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n^\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} exp(\alpha\ log(x_n)) = \infty$
Sei (x_n) Folge mit $x_n > 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
Wir wissen: $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha\ log(x_n) = \infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n^\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} exp(\alpha\ log(x_n)) = 0$.
Beachte: $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha} \Longrightarrow$ Behauptung.

(d) Sei (x_n) Folge mit $x_n > 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.
Setze $y_n = \alpha\ log(x_n) \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$.
Es gilt $x_n^\alpha = exp(\alpha\ log(x_n)) = exp(y_n) = e^{y_n}$
$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{log(x_n)}{x_n^\alpha} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha} y_n e^{-y_n} = 0$ nach (a). $\square$

Merksatz:
e^x wächst schneller als jede Potenz von x (Teil (a)).
$log(x)$ wächst langsamer als jede Potenz von x (Teil (d)).

2.3 Komplexe Zahlen, Folgen und Stetigkeit

Betrachte Menge $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{R}\}$.

Definiere:

- Addition: $(x,y) + (x',y') := (x+x', y+y')$
- Multiplikation: $(x,y) \cdot (x',y') := (xx' - yy', xy' + yx')$
- Nullelement: $(0,0)$
- Einselement: $(1,0)$

Die Menge $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein <u>Körper</u> ($\ddot{U}A$).

Heißt Körper der <u>Komplexen Zahlen</u>, Bezeichnung : $\mathbb{C}$
Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $\varphi(x) = (x,0)$ ist injektiv.
Es gilt: $\{(1,0),(0,1)\}$ sind Basis. Also gibt es eine eindeutige Zerlegung

$$(x,y) = x \cdot \underbrace{(1,0)}_{=1\in\mathbb{R}} + y \cdot \underbrace{(0,1)}_{i}$$

Also ist $(x,y) = x + iy$. Hier $i := (0,1)$.
Jedes $z \in \mathbb{C}$ hat eindeutige Zerlegung $z = x + iy$.
x heißt <u>Realteil</u> von z, $Re(z)$.
y heißt <u>Imaginärteil</u> von z, $Im(z)$.

Nach Rechenregel für Multiplikation gilt:
$\underline{i^2} = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0) = \underline{-1}$

Es gelten die üblichen Rechenregeln unter Berücksichtigung von $i^2 = -1$.

Ist $z = x + iy$, so heißt $\overline{z} := x - iy$ <u>konjugiert</u> (komplex) zu z (Spiegelung an der x-Achse).

$|z| := \sqrt{z\overline{z}}$. Nachrechnen: $z\overline{z} = x^2 + y^2 \Longrightarrow |z| = \sqrt{x^2+y^2}$.
Außerdem: $Re(z) = x = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$
$Im(z) = y = \frac{1}{2}(z - \overline{z})$

Satz 14:
Seien $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

(a) $|z| \geq 0$ und $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$

(b) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (<u>Dreiecksungleichung</u>)

(c) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

Beweis:

(a) klar

(b) Gilt stets $Re(z) \leq |z|$
$\Longrightarrow Re(z_1\overline{z_2}) \leq |z_1\overline{z_2}| = |z_1|\ |\overline{z_2}| = |z_1|\ |z_2|$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow |z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + 2Re(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\ &= (|z_1|+|z_2|)^2\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Behauptung.

(c) Gilt $|z_1z_2|^2 = (z_1z_2)(\overline{z_1z_2}) = (z_1z_2)(\overline{z_1}\ \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1}\ z_2\overline{z_2} = |z_1|^2|z_2|^2$
$\Longrightarrow$ Behauptung.

Definition:
Eine Folge (c_n) komplexer Zahlen heißt <u>konvergent</u> gegen $c \in \mathbb{C}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $|c_n - c| < \varepsilon\ \forall n \geq N$.

Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$

Satz 15:
Sei $(c_n)_{n\geq 1}$ eine Folge komplexer Zahlen. Die Folge (c_n) konvergiert genau dann, wenn $(Re(c_n))_{n\geq 1}$ und $(Im(c_n))_{n\geq 1}$ konvergieren.

Beweis:

(a) Angenommen (c_n) konvergiert gegen $c = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}$.
Setze $c_n = a_n + ib_n, n \geq 1$. Dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|c_n - c| < \varepsilon\ \forall n \geq N$.

$$\Longrightarrow \begin{array}{l} |a_n - a| = |Re(c_n - c)| \leq |c_n - c| < \varepsilon \\ |b_n - b| = |Im(c_n - c)| \leq |c_n - c| < \varepsilon \end{array} \quad \forall n \geq N \Longrightarrow \begin{array}{l} \lim a_n = a \\ \lim b_n = b \end{array}$$

(b) Umgekehrt gelte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Sei $\varepsilon > 0$.
Dann gibt es $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq N_1,\ |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq N_2$.
Setze $c := a + ib,\ N := max\{N_1, N_2\}$.
Dann gilt für alle $n \geq N$:

$$\begin{aligned}|c_n - c| = |a_n - a| + i|b_n - b| &\leq |a_n - a| \leq |a_n - a| + |i||b_n - b| \\ &= |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = c\end{aligned}$$

□

Folgerung: Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$, so folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{c_n} = \overline{c}$.

Definition:
Eine Folge (c_n) komplexer Zahlen heißt <u>Cauchy-Folge</u>, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N gibt mit $|c_n - c_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$.

Satz 16:
Eine Folge $(c_n)_{n\geq 1}$ komplexer Zahlen ist genau dann eine Cauchy-Folge, wenn $(Re(c_n))_{n\geq 1}$ und $(Im(c_n))_{n\geq 1}$ Cauchy-Folgen sind.

Beweis: Analog wie im Beweis von Satz 15.

Satz 17:
In $\mathbb{C}$ ist jede Cauchy-Folge konvergent.

Beweis:
Die Folge $(c_n)_{n\geq 1}$ sei eine Cauchy-Folge. Nach Satz 16 sind $(Re(c_n))_{n\geq 1}$ und $(Im(c_n))_{n\geq 1}$ reelle Cauchy-Folgen $\Longrightarrow$ $(Re(c_n))_{n\geq 1}$ und $(Im(c_n))_{n\geq 1}$ konvergent. Aus Satz 15 folgt $(c_n)_{n\geq 1}$ ist konvergent. $\square$

Satz 18:
Seien $(c_n)_{n\geq 1}$ und $(d_n)_{n\geq 1}$ konvergente komplexe Folgen. Dann sind auch $(c_n \pm d_n)_{n\geq 1}$ und $(c_n \cdot d_n)_{n\geq 1}$ konvergent und es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (c_n \pm d_n)_{n\geq 1} &= \lim_{n\to\infty} c_n \pm \lim_{n\to\infty} d_n \\ \lim_{n\to\infty} (c_n \cdot d_n)_{n\geq 1} &= \lim_{n\to\infty} c_n \cdot \lim_{n\to\infty} d_n \end{aligned}$$

Ist $\lim\limits_{n\to\infty} d_n \neq 0$, so gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $d_n \neq 0$ für alle $n \geq N$ und es gilt

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq N}} \frac{c_n}{d_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} c_n}{\lim\limits_{n\to\infty} d_n}$$

Beweis: Siehe Satz I.10.

Definition:
Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ komplexer Zahlen heißt <u>konvergent</u>, wenn die Folge $(s_n)_{n\geq 1}$ der Partialsummen konvergent ist $(s_n = \sum_{k=1}^{n} c_k)$.
Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ heißt <u>absolut konvergent</u>, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ konvergent ist.

<u>**Majorantenkriterium:**</u>
Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ <u>reeller</u> Zahlen sei konvergent, $a_n \geq 0$. Gilt $|c_n| \leq a_n$ für alle $n \geq 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ absolut konvergent.

<u>**Quotientenkriterium:**</u>
Sei $\sum_{n=1}^{\infty}$ eine Reihe komplexer Zahlen mit $c_n \neq 0$ für alle $n \geq N$. Es gebe $\Theta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \Theta < 1$, so daß $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \leq \Theta$ für alle $n \geq N$ gilt. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty}$ absolut konvergent.

Beispiel:

- Exponentialreihe:
  $exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$.
  Für $n \geq 2|z|$ gilt mit $c_n = \frac{z^n}{n!}$

  $$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{z^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot z^n}\right| = \frac{|z|}{n+1} \leq \frac{|z|}{2|z|} = \frac{1}{2} < 1$$

  Also folgt absolute Konvergenz aus dem Quotientenkriterium.

  Berechnung:
  $exp(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} + r_n(z)$ mit $|r_n(z)| \leq 2\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$ falls $|z| \leq 1 + \frac{n}{2}$.

- Funktionalgleichung:
  $exp(z_1 + z_2) = exp(z_1) \cdot exp(z_2)$
  $exp(\overline{z}) = \overline{exp(z)}$

Definition:
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt <u>stetig</u> in $p \in D$, wenn für jede Folge $(z_n)_{n\geq 1} \subseteq D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = p$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(p) \qquad \underline{\text{Folgenstetigkeit}}$$

Beispiel:
exp ist stetig in allen $z \in \mathbb{C}$. Folgt aus Restgliedabschätzung mit $n = 0$.

2.3.1 Trigonometrische Funktionen

Sei $x \in \mathbb{R}$. Man definiere

$$cos\ x := Re(e^{ix}),\ sin\ x := Im(e^{ix})$$

Es gilt

$$\left|\mathbf{e^{ix}}\right|^{\mathbf{2}} = e^{ix}(\overline{e^{ix}}) = e^{ix} \cdot e^{\overline{ix}} = e^{ix} \cdot e^{-ix} = e^{ix-ix} = e^0 = \mathbf{1}$$

$\Longrightarrow |e^{ix}| = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Aus der Definition folgt:

$$cos\ x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \qquad sin\ x = \frac{1}{2 \cdot i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

$$cos\ (-x) = cos\ x \qquad sin\ (-x) = -sin\ x$$

$$cos^2 x + sin^2 x = 1$$

Satz 19:
Die Funktionen $cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig auf $\mathbb{R}$.

Beweis:
Sei $p \in \mathbb{R}$ und (x_n) eine reelle Folge mit $x_n \to p \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} ix_n = ip$.
Da *exp* stetig ist, folgt $\lim\limits_{n\to\infty} e^{ix_n} = e^{ip}$. Nach Satz 15 gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} cos\ x_n &= \lim_{n\to\infty} Re(e^{ix_n}) = Re(e^{ip}) = cos\ p \\
\lim_{n\to\infty} sin\ x_n &= \lim_{n\to\infty} Im(e^{ix_n}) = Im(e^{ip}) = sin\ p
\end{aligned}$$

Satz 20:
Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
cos\ (x+y) &= cos\ x \cdot cos\ y - sin\ x \cdot sin\ y \\
sin\ (x+y) &= sin\ x \cdot cos\ y + cos\ x \cdot sin\ y
\end{aligned} \qquad \text{(\underline{Additionstheoreme})}$$

Beweis:
Gilt $e^{i(x+y)} = e^{ix+iy} = e^{ix}e^{iy}$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow cos(x+y) + i\ sin(x+y) =& (cos\ x + i\ sin\ x)(cos\ y + i\ sin\ y) \\
=& \underbrace{cos\ x \cdot cos\ y - sin\ x \cdot sin\ y}_{=cos\ (x+y)} \\
& + i(\underbrace{sin\ x \cdot cos\ y + cos\ x \cdot sin\ y}_{=sin\ (x+y)})
\end{aligned}$$

Satz 21:
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$cos\ x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad sin\ x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Beweis:
Konvergenz der Reihen folgt aus Quotientenkriterium.
Beachte $i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1$

Allgemein:

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 4k \\ i & \phantom{\text{falls }} n = 4k+1 \\ -1 & \phantom{\text{falls }} n = 4k+2 \\ -i & \phantom{\text{falls }} n = 4k+3 \end{cases}$$

$\Longrightarrow e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ $\square$

Folgerung: $cos\ (-x) = cos\ x$ und $sin\ (-x) = -sin\ x$

Berechnung:

$$cos\ x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_n(x),\ |r_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+2)!}, \text{ falls } |x| \leq 2n+3$$
$$sin\ x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_n(x),\ |r_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}, \text{ falls } |x| \leq 2n+4$$

Folgerung: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin\ x}{x} = 1$

Beweis:
Mit $n = 0$ ist $sin\ x = x + r_0(x)$ mit $|r_0(x)| \leq \frac{|x|^3}{3!}$ falls $|x| \leq 4$
$\Longrightarrow |sin\ x - x| \leq \frac{x^3}{6}$ für $|x| \leq 4$.
Also gilt für $0 < |x| \leq 4 \left|\frac{sin\ x}{x} - 1\right| \leq \frac{|x^3|}{6} \Longrightarrow$ Behauptung.

<u>Definition der Zahl π</u>

Hilfssatz:

(a) $cos\ 2 \leq -\frac{1}{3}$

(b) $sin\ x > 0$ falls $0 < x \leq 2$

(c) cos ist im Intervall $[0, 2]$ streng monoton fallend.

Beweis:

(a) Reihe für cos mit $n = 1$:
$cos\ x = 1 - \frac{x^2}{2} + r_1(x);\ |r_1(x)| \leq \frac{|x|^4}{24}$ falls $|x| \leq 5$
Setze $x = 2 \Longrightarrow cos\ 2 = 1 - 2 + r_1(2);\ r_1(2) \leq \frac{2}{3}$
$\Longrightarrow cos\ 2 = -1 + r_1(2) \leq -\frac{1}{3}$

(b) $sin\ x = x + r_0(x);\ |r_o(x)| \leq \frac{|x|^3}{6}$ falls $|x| \leq 4$
Für $0 < x \leq 2$ gilt dann:
$sin\ x = x(1 + \frac{r_0(x)}{x});\ |\frac{r_o(x)}{x}| \leq \frac{|x|^2}{6} \leq \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
$\Longrightarrow sin\ x \geq x(1 - \frac{2}{3}) = \frac{2}{3} > 0$

(c) Es gilt: $cos\ x - cos\ y = -2sin\ \frac{x+y}{2} sin\ \frac{x-y}{2}$ (ÜA)
Sei $0 \leq x < x' \leq 2$. Mit (b) und Formel oben folgt dann:
$$cos\ x' - cos\ x = -2 \cdot \underbrace{sin\ \frac{x'+x}{2}}_{>0} \cdot \underbrace{sin\ \frac{x'-x}{2}}_{>0} < 0$$
$\Longrightarrow cos$ streng monoton fallend in $[0, 2]$. □

Satz 22:
Die Funktion cos hat im Intervall $[0, 2]$ genau eine Nullstelle.

Beweis:
Wir wissen, $cos\ 0 = 1,\ cos\ 2 \leq -\frac{1}{3} < 0$.
cos stetig; Zwischenwertsatz liefert mindestens eine Nullstelle von cos in $[0, 2]$.
cos hat aber höchstens eine Nullstelle, da cos streng monoton fallend in $[0, 2]$ (Hilfssatz (c)), d.h. cos ist dort injektiv.
Also ist die Nullstelle eindeutig bestimmt. □

Definition der Zahl π:
$\frac{\pi}{2}$ ist die eindeutig bestimmte <u>Nullstelle von cos</u> in $[0, 2]$.

Eigenschaften von π:

$$e^{\frac{i\pi}{2}} = i;\ e^{i\pi} = -1;\ e^{\frac{3i\pi}{2}} = -i;\ e^{2i\pi} = 1$$

Beweis:
Wir wissen: $cos\ \frac{\pi}{2} = 0 \Longrightarrow sin^2 \frac{\pi}{2} = 1 - cos^2 \frac{\pi}{2} = 1 \Longrightarrow sin\ \frac{\pi}{2} = i$.
Die restlichen Behauptungen folgen: $e^{\frac{ik\pi}{2}} = (e^{\frac{i\pi}{2}})^k = i^k$.
Also gelten die Gleichungen.
Sei x reell, $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $e^{ix+2k\pi} = e^{ix} \cdot e^{2ik\pi} = e^{ix}(e^{2i\pi})^k = e^{ix}$

Periodizität:
$cos\ (x + 2\pi) = cos\ x,\ sin\ (x + 2\pi) = sin\ x\ \forall x \in \mathbb{R}$.
$cos\ (x + \pi) = -cos\ x,\ sin\ (x + \pi) = -sin\ x\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Nullstellen:
$cos\ x = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$
$sin\ x = 0 \Longleftrightarrow x = k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$

Weitere Formeln:
$cos\ x = sin\ (\frac{\pi}{2} - x), \quad sin\ x = cos\ (\frac{\pi}{2} - x)$
$e^{ix} = 1 \Longleftrightarrow x \in \mathbb{R}$ und $x = 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Denn es gilt:

$$sin\ \frac{x}{2} = \frac{1}{2i}(e^{\frac{ix}{2}} - e^{\frac{-ix}{2}}) = \frac{e^{-\frac{ix}{2}}}{2i}(e^{ix} - 1)$$

Also $e^{ix} = 1 \Longleftrightarrow sin\ \frac{x}{2} = 0 \Longleftrightarrow \frac{x}{2} = k\pi$ □

Satz 23:

(a) $cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ ist streng monoton fallend und bijektiv.
Umkehrfunktion $arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ (<u>Arcus Cosinus</u>)

(b) $sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ ist streng monoton wachsend und bijektiv.
Umkehrfunktion $arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (<u>Arcus Sinus</u>)

Beweis:

(a) Nach Hilfssatz (a) ist cos in $[0, 2]$, also auch in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton fallend.
Da $cos\ x = -cos\ (\pi - x)$ ist cos auch in $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ streng monoton fallend
$\Longrightarrow cos$ bijektiv in $[0, \pi]$ und Existenz der Umkehrfunktion folgt mit Satz 9.

(b) $sin\ x = cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Longrightarrow sin$ streng monoton wachsend in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ nach (a).
$\Longrightarrow$ Behauptung. $\square$

Satz 24: (Polarkoordinaten)
Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$z = r \cdot e^{i\varphi},\ r = |z| \in \mathbb{R}_+,\ \varphi \in \mathbb{R},\ 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Beweis: *ÜA*

Kapitel 3

Differentiation und Integration

3.1 Differentiation

Definition:
Sei $D \subseteq \mathbb{R},\ f : D \to \mathbb{R}$ heißt in $x \in D$ differenzierbar, falls der Grenzwert

$$f'(x) := \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi \neq x}} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$$

existiert. Hier muss gelten: $\xi \in D \backslash \{x\}$

Der Grenzwert $f'(x)$ heißt Differentialquotient oder Ableitung von f im Punkt x.
f heißt differenzierbar in D, falls f in allen $x \in D$ differenzierbar ist.
Andere Formulierung: Setze $h := \xi - x$

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Hier ist (h_n) eine beliebige Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$ und $h_n \in D\backslash\{x\}$.

Geometrische Interpretation:
Der Differenzenquotient $\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi - x}$ ist die Steigung der Sekante des Graphen von f durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(\xi, f(\xi))$.
Falls $\xi \to x$, so ist Sekante = Tangente.

Berechnung einiger Ableitungen (mit Hilfe der Definitionen):

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = c$ (konstante Funktion)
$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = cx, c \in \mathbb{R}$
$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{c(x+h)-cx}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{ch}{h} = \lim\limits_{h\to 0} c = c$

(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$
$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 2x + h = 2x$

Allgemeiner: Für $f(x) = x^n,\ n \geq 1$ gilt $f'(x) = nx^{n-1}$ (Binomische Formel)

(4) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x} \quad (\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\})$
$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{x-x-h}{(x+h)x}\right) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{-h}{(x+h)x}\right) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-1}{(h+x)x} = -\frac{1}{x^2}$

(5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, f(x) = exp(x) = e^x$
$exp'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{exp(x+h)-exp(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{exp(x)\cdot exp(h)-exp(x)}{h} = exp(x) \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{exp(h)-1}{h}$
Beachte dazu: $exp(h) - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!} = h\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!}$
$\Longrightarrow \lim\limits_{h\to 0} \frac{exp(h)-1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!} = 1$
$\Longrightarrow exp'(x) = exp(x)\ \forall x \in \mathbb{R}.$
Die Exponentialfunktion ist also eine Lösung der Differentialgleichung $f' = f$.

(6) $sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$sin'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{sin(x+h)-sin(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{2cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$
Da cos stetig, gilt $\lim\limits_{h\to 0}(cos(x + \frac{h}{2})) = cos(x)$. Es wurde gezeigt (vor Hilfssatz):
$\lim\limits_{h\to 0} \frac{sin(h)}{h} = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{h\to 0} \frac{sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = 1$
$\Longrightarrow sin'(x) = cos(x)$

(7) $cos'(x) = -sin(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$
Folgerung:
$(sin'(x))' =: sin''(x) = cos'(x) = -sin(x)$
$cos''(x) = -cos(x)$
Also sind sin und cos Lösungen der Differentialgleichung $f'' = -f$.

(8) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, f(x) = |x|$
Behauptung: f ist in $x = 0$ nicht differenzierbar.
Beweis:
Sei $h_n = (-1)^n\frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$.
Es gilt $\frac{f(0+h_n)-f(0)}{h_n} = \frac{|h_n|-0}{h_n} = \frac{\frac{1}{n}-0}{(-1)^n\frac{1}{n}} = (-1)^n$. Also existiert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(0+h_n)-f(0)}{h_n}$ nicht, d.h. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ existiert nicht.

Satz 1:
Sei $D \subseteq \mathbb{R},\ a \in D$. $f : D \to \mathbb{R}$ ist in a genau dann differenzierbar, wenn es $c \in \mathbb{R}$ und $\varphi : D \to \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) = f(a) + c(x-a) + \varphi(x)\ \forall x \in D$, wobei $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\neq a}} \frac{\varphi(x)}{x-a} = 0$.

In diesem Fall ist $c = f'(a)$.
Man sagt: f kann lokal linear approximiert werden.

Beweis:

(a) Sei zuerst f differenzierbar in a und $c := f'(a)$.
Setze $\varphi(x) = f(x) - f(a) - c(x-a)$.
Dann $\frac{\varphi(x)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - c \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to a\\x\neq a}} \frac{\varphi(x)}{x-a} = \lim\limits_{\substack{x\to a\\x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - c = f'(a) - c = 0.$

(b) Umgekehrt gelte: $f(x) = f(a) + c(x-a) + \varphi(x)$ mit
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{\varphi(x)}{x-a} = 0 = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - c = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \varphi(x) = 0$
$\Longrightarrow f$ ist differenzierbar in a und $f'(a) = c$. $\square$

Folgerung: $f : D \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar in $a \in D$. Dann ist f in a stetig.

Beweis:
Aus Satz 1 folgt $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{\varphi(x)}{x-a} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \varphi(x) = 0$
$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) + \lim\limits_{x\to a}(c(x-a) + \varphi(x)) = f(a) \Longrightarrow f$ stetig in a.

f differenzierbar $\Longrightarrow f$ stetig.

Satz 2:
Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in D, $x \in D$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $f+g$, λf und $fg : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in D und es gilt

$$(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x),\ (\lambda f)'(x) = \lambda f'(x),\ (fg)'(x) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

Ist $g(\xi) \neq 0$ für alle $\xi \in D$, so ist auch $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in D und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Beweis:
Formeln für $(f+g)'$ und $(\lambda f)'$ folgen aus den Rechenregeln für Grenzwerte.

<u>Produktregel:</u>

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[f(x+h)(g(x+h) - g(x)) + (f(x+h) - f(x))g(x)\right] \\
&= \lim_{h\to 0} f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) \\
&= f(x)g'(x) + f'(x)g(x)
\end{aligned}$$

<u>Quotientenregel:</u> Spezialfall $f = 1$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{g(x) - g(x+h)}{g(x)g(x-h)}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \cdot \frac{g(x) - g(x+h)}{h} \\
&= -\frac{g'(x)}{g^2(x)}
\end{aligned}$$

Damit und Produktregel folgt:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(f\frac{1}{g}\right)'(x) = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\frac{-g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$\square$

Beispiele:
$f_n(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$. Dann $f_n'(x) = nx^{n-1}$.
Beweis: Gilt für $n = 1$. Wegen $f_{n+1} = xf_n$ folgt

$$f_{n+1}'(x) = x'f_n(x) + xf_n'(x) = f_n(x) + xnx^{n-1} = x^n + nx^n = (n+1)x^n \checkmark$$

$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x^n} \Longrightarrow f'(x) = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$

Satz 3:
Sei $D \in \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ sei stetig und streng monoton. Sei $\overline{D} = f(D)$ und sei $\varphi = f^{-1} : \overline{D} \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von f. Ist f in $x \in D$ differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$, so ist φ im Punkt $\varphi := f(x)$ differenzierbar und es gilt

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(\varphi(y))}$$

Beweis:
Sei $(\eta_n) \subseteq \overline{D}\backslash\{y\}$ eine beliebige Folge mit $\lim_{n\to\infty} \eta_n = y$. Setze $z_n = \varphi(\eta_n)$.
φ ist stetig $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(\eta_n) = \varphi(y) = x$.
Außerdem gilt $z_n \neq x$ für alle $n \geq 1$, da f bijektiv, insbesondere injektiv ist.
Es gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(\eta_n) - \varphi(y)}{\eta_n - y} &= \lim_{n\to\infty} \frac{z_n - x}{f(z_n) - f(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{f(z_n)-f(x)}{z_n - x}} \\ &= \frac{1}{f'(x)} \Longrightarrow \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(\varphi(y))}\end{aligned}$$

$\square$

Beispiele:

(1) Die Umkehrfunktion von $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ist $log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Es folgt

$$log'(x) = \frac{1}{exp(log\ x)} = \frac{1}{x} \quad \text{für alle } x > 0$$

(2) Die Umkehrfunktion von $sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ ist $arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Sei $-1 < x < 1$. Dann gilt

$$arcsin'(x) = \frac{1}{sin'(arcsin\ x)} = \frac{1}{cos(arcsin\ x)}$$

Setze $y = arcsin\ x \Longrightarrow sin\ y = x$.
Pythagoras: $cos\ y = \sqrt{1 - x^2}$
$\Longrightarrow arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1 < x < 1$

(3) Die Umkehrfunktion von $tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ ist $arctan$. Wende Satz an:
Wir wissen, daß

$$tan'x = \frac{1}{cos^2 x} \Longrightarrow arctan'(x) = \frac{1}{tan'(arctan\ x)} = cos^2(arctan\ x)$$

Setze $y = arctan\ x$
$\Longrightarrow tan\ y = x \Longrightarrow x^2 = tan^2 y = \frac{sin^2 y}{cos^2 y} = \frac{1-cos^2 y}{cos^2 y} = \frac{1}{cos^2 y} - 1$
$\Longrightarrow cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$
$\Longrightarrow arctan'(x) = cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$

Satz 4 (Kettenregel):
Seien $f : D \to \mathbb{R},\ g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subseteq E$.
f sei in $x \in D$ differenzierbar, g sei in $y = f(x) \in E$ differenzierbar. Dann ist auch $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

Beweis:
Definiere die Funktion $\overline{g}$ durch $\overline{g} : E \to \mathbb{R}$.

$$\overline{g}(z) = \begin{cases} \frac{g(z)-g(y)}{z-y} & \text{falls } z \neq y \\ g'(y) & \text{falls } z = y \end{cases}$$

g differenzierbar in y $\Longrightarrow \lim\limits_{z \to y} \overline{g}(z) = \overline{g}(y) = g'(y)$.
Für alle $z \in E$ gilt außerdem $g(z) - g(y) = \overline{g}(z)(z - y)$.
Benutze das mit $z = f(\xi),\ y = f(x)\ (\xi \in D)$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow (g \circ f)'(x) &= \lim_{\xi \to x} \frac{g(f(\xi)) - g(f(x))}{\xi - x} = \lim_{\xi \to x} \frac{\overline{g}(f(\xi))(f(\xi) - f(x))}{\xi - x} \\ &= \lim_{\xi \to x} \overline{g}(f(\xi)) \cdot \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = g'(f(x))f'(x) \end{aligned}$$

□

Beispiele:

1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $a, b \in \mathbb{R}$. Definiere $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $F(x) = f(ax + b)$. Dann gilt nach Kettenregel $F'(x) = a \cdot f'(ax + b)$.

2. Sei $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ und $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^a$. Dann gilt $f(x) = exp(a\ log\ x)$.

$$\begin{aligned} \textit{Kettenregel: } f'(x) &= (a\ log\ x)' exp'(a\ log\ x) = \frac{a}{x}\ exp(a\ log\ x) \\ &= \frac{a}{x} \cdot x^a = \underline{ax^{a-1}} \end{aligned}$$

3.1.1 Höhere Differentialquotienten / Ableitungen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in D. Für $x \in D$ schreibe $\frac{df}{dx}(x) := f'(x)$. Ist f' in x ebenfalls differenzierbar, so heißt

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) := f''(x) := (f')'(x) \quad \text{2. Ableitung von } f \text{ in } x.$$

Eine Funktion heißt k-mal differenzierbar in $x \in D$, falls $\varepsilon > 0$ existiert, so daß $f : D \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \to \mathbb{R}$ $(k-1)$-mal differenzierbar in $D \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ ist und die $(k-1)$-te Ableitung von f in x differenzierbar ist.

Schreibweise:

$$f^{(k)}(x) = \frac{d^k f}{dx^k}(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^k f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} f(x)\right)$$

3.2 Sätze über differenzierbare Funktionen / Anwendungen

Definition:
Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f hat im Punkt $x \in (a,b)$ ein lokales Maximum (Minimum) , wenn es $\varepsilon > 0$ gibt mit $f(x) \geq f(\xi)$ $(f(x) \leq f(\xi))$ für alle ξ mit $|x - \xi| < \varepsilon$. Gilt das Gleichheitszeichen nur für $x = \xi$, so heißt das Maximum (Minimum) strikt.

Satz 5:
$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ besitze ein lokales Maximum oder Minimum in x und sei in x differenzierbar. Dann gilt $f'(x) = 0$.

Beweis:
f habe Maximum in x. Nach Definition existiert $\varepsilon > 0$ mit $f(\xi) \leq f(x)$ für alle $\xi \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Dann folgt

$$f'_+(x) := \lim_{\xi \downarrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \leq 0 \quad \underline{\text{Rechtsseitiger Differentialquotient}}$$
$$f'_-(x) := \lim_{\xi \uparrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \geq 0 \quad \underline{\text{Linksseitiger Differentialquotient}}$$

f differenzierbar in $x \Longrightarrow f'_+(x) = f'_-(x) = f'(x) \Longrightarrow f'(x) = 0$ □

Achtung:
$f'(x) = 0$ ist nicht hinreichend für ein lokales Extremum (Minimum oder Maximum).
$f(x) = x^3 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2,\ f'(0) = 0$, aber f hat im Nullpunkt kein Extremum.

Definition:
Ein lokales Maximum (Minimum) heißt absolut, falls $f(\xi) \leq f(x)$ $(f(\xi) \geq f(x))$ für alle $\xi \in (a,b)$. Man spricht in diesem Falle auch von einem globalen Extremum. Ist f in $[a,b]$ (abgeschlossenes Intervall), so hat f dort ein globales Maximum und ein globales Minimum.

Satz 6 (Satz von Rolle):
Sei $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) = f(b)$. Außerdem sei f in (a,b) differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis:
f konstant $\Longrightarrow$ Behauptung. Also sei f nicht konstant $\Longrightarrow$ es existiert $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) > f(a)$ oder $f(x_0) < f(a)$. Im Intervall $[a,b]$ gibt es ein Maximum (oder Minimum) von f. Sei ξ der Punkt, in dem f Maximum (oder Minimum) annimmt $\Longrightarrow f'(\xi) = 0$ □

Folgerung:
Zwischen zwei Nullstellen der Funktion liegt eine Nullstelle der Ableitung.

Satz 7 (Mittelwertsatz):
Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar.
Dann gibt es $\xi \in (a, b)$ mit $f(b) = f(a) + f'(\xi)(b - a)$.

Beweis:
Definiere $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$\Longrightarrow F$ stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b). Es gilt $F(a) = f(a) = F(b)$.
Rolle auf F anwenden: es existiert $\xi \in (a, b)$ mit $F'(\xi) = 0$. Gilt
$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Longrightarrow f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ □

Andere Formulierung des Mittelwertsatzes:
Es gibt $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Folgerungen: Sei f stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b).

(1) Gilt $m \leq f'(x) \leq M \ \forall x \in (a, b)$, so gilt
$m(y - x) \leq f(y) - f(x) \leq M(y - x) \ \forall a \leq x \leq y \leq b$.
Denn nach Satz 7 gibt es $\xi \in [x, y]$ mit $m \leq f'(\xi) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq M$

(2) Ist $f'(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$, so ist f konstant.
Folgt aus (1) mit $m = M = 0$.

Satz 8:
Sei f stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b). Für alle $x \in (a, b)$ gelte
$f'(x) \geq 0$ ($f'(x) > 0, f'(x) \leq 0, f'(x) < 0$). Dann ist f monoton wachsend in (a, b)
(streng monoton wachsend, bzw. monoton fallend, bzw. streng monoton fallend).

Beweis:
Nehmen an $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$ (Analog andere Fälle).
Angenommen f ist nicht streng monoton wachsend. Dann gibt es $x, y \in (a, b)$ mit
$x < y$ und $f(x) \geq f(y)$. Nach Mittelwertsatz gibt es $\xi \in (a, b)$ mit
$f'(\xi) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq 0$
Widerspruch zu $f'(\xi) > 0 \Longrightarrow$ Annahme falsch $\Longrightarrow f$ streng monoton wachsend □

Satz 9:
Sei f in (a, b) differenzierbar und in $x \in (a, b)$ zweimal differenzierbar.
Es gelte $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$).
Dann hat f in x ein Minimum (Maximum).

Beweis:
Sei $f''(x) > 0$. Es gilt:

$$f''(x) = \lim_{\xi \to x} \frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} > 0$$

$\Longrightarrow$ es existiert $\varepsilon > 0$ mit $\frac{f'(\xi)-f'(x)}{\xi-x} > 0$ falls $0 < |\xi - x| < \varepsilon$
$\Longrightarrow f'(\xi) > f'(x)$ falls $\xi > x$ und $f'(\xi) < f'(x)$ falls $\xi < x$
$\Longrightarrow f'(\xi) > 0$ für $\xi > x$ und $f'(\xi) < 0$ für $\xi < x$. Nach Satz 8 ist f im Intervall $(x-\varepsilon, x)$ streng monoton fallend und in $(x, x+\varepsilon)$ streng monoton steigend
$\Longrightarrow f$ hat ein Minimum im Punkt x.
Analog falls $f''(x) < 0$ □

Bemerkung: Man sagt auch, f hat ein <u>isoliertes Minimum</u> (<u>Maximum</u>).

Definition:
$D \subseteq \mathbb{R}$ sei ein Intervall. $f : D \to \mathbb{R}$ heißt <u>konvex</u>, wenn $\forall x, y \in D$ und alle λ mit $0 < \lambda < 1$ gilt:

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

("Der Graph von f liegt unterhalb der Sehne von $(x, f(x))$ nach $(y, f(y))$").
f heißt <u>konkav</u>, wenn $-f$ konvex ist.

Satz 10:
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar.
f ist genau dann konvex, wenn $f''(x) \ge 0$ für alle $x \in D$ gilt.

Beweis:
Sei $f''(x) \ge 0$ für alle $x \in D$. Nach Satz 8 ist f' monoton wachsend.
Sei $x, y \in D,\ x < y,\ \lambda \in \mathbb{R}$ mit $0 < \lambda < 1$. Setze $w = \lambda x + (1-\lambda)y$.

Müssen zeigen: $f(w) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$. Es gilt $x < w < y$.
Nach Mittelwertsatz gibt es $\xi_1 \in (x, w)$ und $\xi_2 \in (w, y)$ mit
$\frac{f(w)-f(x)}{w-x} = f'(\xi_1) \le f'(\xi_2) = \frac{f(x)-f(w)}{y-w}$.
Nun beachte $w - x = (1-\lambda)(y-x)$ und $y - w = \lambda(y-x)$
$\Longrightarrow \frac{f(w)-f(x)}{(1-\lambda)(y-x)} \le \frac{f(y)-f(w)}{\lambda(y-w)} \Longrightarrow \lambda[f(w) - f(x)] \le (1-\lambda)[f(y) - f(w)]$
$\Longrightarrow f(w) \le (1-\lambda)f(y) + \lambda f(x)$. Also ist f konvex.

Umgekehrt sei f konvex. Angenommen es gilt nicht $f''(x) \ge 0\ \forall x \in D$.
Dann gibt es $x_0 \in D$ mit $f''(x_0) < 0$. Setze $c := f'(x_0)$ und
$\varphi(x) := f(x) - c(x - x_0)\ \forall x \in D$
Dann ist $\varphi : D \to \mathbb{R}$ zweifach differenzierbar in D und es gilt
$\varphi'(x_0) = f'(x) - c = 0,\ \varphi''(x_0) = f''(x_0) < 0 \Longrightarrow \varphi$ hat nach Satz 9 in x_0 ein isoliertes Minimum.
Also gibt es $\varepsilon > 0$ mit $\varphi(x_0 - \varepsilon) < \varphi(x_0)$ und $\varphi(x_0 + \varepsilon) > \varphi(x_0)$
$\Longrightarrow f(x_0) = \varphi(x_0) > \frac{1}{2}[\varphi(x_0 - \varepsilon) + \varphi(x_0 + \varepsilon)] = \frac{1}{2}[f(x_0 - \varepsilon) + f(x_0 + \varepsilon)]$ nach Definition von φ (nachrechnen!).
Setze $x = x_0 - \varepsilon, y = x_0 + \varepsilon, \lambda = \frac{1}{2}$. Dann ist $x_0 = \lambda x + (1-\lambda)y$.
Außerdem $f(x_0) = f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$
$\Longrightarrow$ Widerspruch zu Konvexität von $f \Longrightarrow$ Annahme falsch $\Longrightarrow f''(x) \le 0\ \forall x$ □

3.3 Das Riemannsche Integral

Erinnerung: Seien $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. Eine Funktion $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, wenn es eine Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \quad (*)$$

gibt, so dass φ auf jedem Intervall (x_{k-1}, x_k) konstant ist.
Sei $T[a, b]$ die Menge aller Treppenfunktionen $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$.
Aus linearer Algebra bekannt:
Die Menge aller Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist ein Vektorraum. Man zeigt: $T[a, b]$ ist Untervektorraum.
Sei $\varphi \in T[a, b]$ bzgl. Unterteilung $(*)$. Auf dem Intervall (x_{k-1}, x_k) ist φ konstant.
Sei $\varphi(x) = c_k$ für $x \in (x_{k-1}, x_k),\ 1 \leq k \leq n$.

Definiere Integral von φ bzgl. Unterteilung $(*)$ durch

$$\int_a^b \varphi(x)dx := \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}) \qquad \text{Flächeninhalt}$$

Aber: Es kann auch eine andere Unterteilung des Intervalls $[a, b]$ geben, z.B.:

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b \quad (**),$$

so dass φ auf (t_{k-1}, t_k) konstant ist. Dann gilt auch

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{k=1}^{n} d_k(t_k - t_{k-1}), \quad d_k = \varphi(x) \text{ für } x \in (t_{k-1}, t_k)$$

Integral von φ bzgl. Unterteilung $(**)$

Satz:
Das Integral von $\varphi \in T[a, b]$ ist unabhängig von der gewählten Unterteilung von $[a, b]$.

Definition:
$f : [a, b] \to \mathbb{R}, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Wir schreiben $f \leq g$, falls $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$.

Satz 11:
Seien $\varphi, \psi \in T[a, b],\ \lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(a) $\int_a^b (\varphi + \psi)(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b \psi(x)dx$

(b) $\int_a^b (\lambda\varphi)(x)dx = \lambda \int_a^b \varphi(x)dx$

(c) Ist $\varphi \leq \psi$, so gilt $\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b \psi(x)dx$

Beweis:
Integral ist unabhängig von der Unterteilung von $[a, b]$.
Wähle also gemeinsame Unterteilung für φ und ψ, z.B.
$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ mit $\varphi(x) = c_k,\ \psi(x) = d_k$ für $x \in (x_{k-1}, x_k)$
Alle Behauptungen dann trivial. $\square$

Definition:
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt
(d.h. es gibt $m, M \in \mathbb{R}$ mit $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$).

$\int_a^{b^*} f(x)dx := inf \left\{ \int_a^b \varphi(x)dx | \varphi \in T[a, b], \varphi \geq f \right\}$ <u>Oberintegral</u>

$\int_{a\,*}^{b} f(x)dx := sup \left\{ \int_a^b \varphi(x)dx | \varphi \in T[a, b], \varphi \leq f \right\}$ <u>Unterintegral</u>

Beispiele:

(1) $\varphi \in T[a, b]$. Dann
$\int_a^{b^*} \varphi(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx = \int_{a\,*}^{b} \varphi(x)dx$

(2) Def. $f : [0, 1] \to \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
Dann ist $\int_0^{1^*} f(x)dx = 1$ und $\int_{0\,*}^{1} f(x)dx = 0$

Satz 12:
Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R},\ \lambda > 0$ reell. Dann gilt

(a) $\int_a^{b^*} (f + g)(x)dx \leq \int_a^{b^*} f(x)dx + \int_a^{b^*} g(x)dx$
$\int_{a\,*}^{b} (f + g)(x)dx \geq \int_{a\,*}^{b} f(x)dx + \int_{a\,*}^{b} g(x)dx$

(b) $\int_a^{b^*} (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^{b^*} f(x)dx$
$\int_{a\,*}^{b} (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_{a\,*}^{b} f(x)dx$

Beweis:

(a) Müssen zeigen: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\int_a^{b^*} (f+g)(x)dx \leq \int_a^{b^*} f(x)dx + \int_a^{b^*} g(x)dx + \varepsilon$$

Nach Definition des Oberintegrals gibt es $\varphi, \psi \in T[a, b]$ mit $\varphi \geq f$ und $\psi \geq g$ und $\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^{b^*} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2},\ \int_a^b \psi(x)dx \leq \int_a^{b^*} g(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$

Es gilt: $\varphi + \psi \geq f + g$
$\Longrightarrow \int_a^{b^*} (f + g)(x)dx \leq \int_a^b (\varphi + \psi)(x)dx \leq \int_a^{b^*} f(x)dx + \int_a^{b^*} g(x)dx + \varepsilon.$

Analog restliche Behauptungen. $\square$

Definition:
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.
Dann heißt f Riemann-integrierbar (kurz integrierbar), falls

$$\int_a^{b^*} f(x)dx = \int_{a\ *}^{b} f(x)dx$$

Beispiele:

(1) Jede Treppenfunktion ist Riemann-integrierbar.

(2) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \qquad x \in [0,1]$ ist nicht Riemann-integrierbar

Kriterium:
Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in T[a, b]$ gibt mit $\varphi \le f \le \psi$ und $\int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx < \varepsilon$ (folgt aus der Definition von sup/inf)

Satz 13:
Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f integrierbar.

Beweis:
Wir wissen, f ist beliebig genau durch Treppenfunktionen approximierbar.
Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $\varphi, \psi \in T[a, b]$ mit $\psi(x) - \varphi(x) < \frac{\varepsilon}{b-a} \forall x \in [a, b]$ und $\varphi \le f \le \psi$.
Mit Satz 11 folgt

$$\int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b (\psi - \varphi)(x)dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$$

Nach Kriterium ist f integrierbar. □

f differenzierbar $\Longrightarrow$ f stetig $\Longrightarrow$ f integrierbar

Satz 14:
Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton, so ist f integrierbar.

Beweis:
Sei f monoton wachsend. Definiere Unterteilung von $[a, b]$ durch
$x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, $0 \le k \le n$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
Definiere Treppenfunktion $\varphi(x) = f(x_{k-1}), \psi(x) = f(x_k),\ x \in [x_{k-1}, x_k)$.
Außerdem $\varphi(b) = \psi(b) = f(b)$.
f monoton wachsend $\Longrightarrow \varphi \le f \le \psi$ und

$$\begin{aligned}
\int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k-1}) \\
&= \frac{b-a}{n} \cdot \left(\sum_{k=1}^n f(x_k) - \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \right) \\
&= \frac{b-a}{n} \cdot (f(x_n) - f(x_0))
\end{aligned}$$

Ist n groß genug, so ist der letzte Term $< \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$.
$\Longrightarrow \int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx < \varepsilon \Longrightarrow f$ integrierbar nach Kriterium. $\square$

Weitere Sätze:
Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Dann ist $f + g$ und λf integrierbar, außerdem:

(a) $\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

(b) $\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$.
Außerdem ist $|f|^p$ integrierbar ($p \geq 1$ reell) und (fg) integrierbar.

(c) Es gilt $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

(d) Falls $a < b < c$, so gilt $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

Satz 15 (Mittelwertsatz der Integralrechnung):
$f, \varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig; $\varphi \geq 0$. Dann gibt es $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Beweis:
Sei $m := inf\{f(x)|x \in [a, b]\},\ M := sup\{f(x)|x \in [a, b]\}$. Dann gilt
$m\varphi \leq f\varphi \leq M\varphi$. Mit Satz 11(c) $m \int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \leq M \int_a^b \varphi(x)dx$
$\Longrightarrow$ es existiert μ mit $m \leq \mu \leq M$ und $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \mu \int_a^b \varphi(x)dx$.
Zwischenwertsatz: Es gibt $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \mu \Longrightarrow$ Behauptung $\square$

Spezialfall: Setze $\varphi(x) = 1\ \forall x \in [a, b]$. Dann gibt es $\xi \in [a, b]$ mit
$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$.

3.3.1 Berechnung von Integralen mit Riemannschen Summen

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ Unterteilung von
$[a, b],\ \xi_k \in [x_{k-1}, x_k],\ 1 \leq k \leq n$.
$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ Riemannsche Summe, ξ_k Stützstellen
Feinheit der Unterteilung: $\eta = max\{x_k - x_{k-1}|1 \leq k \leq n\}$

Satz:
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für jede Unterteilung des Intervalls $[a, b]$ der Feinheit $\eta \leq \delta$ und jede Wahl der Stützstellen ξ_k gilt

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon$$

Mit anderen Worten: Das Integral von f kann durch Riemannsche Summen beliebig genau approximiert werden. Unterteilung und Stützstellen sind beliebig.

Beispiele:

(1) Sei $a > 0$; wir berechnen $\int_0^a cos\ x\ dx$. Sei $n \in \mathbb{N}$ und wähle eine äquidistante Unterteilung $x_k = \frac{ka}{n}$ für $0 \leq k \leq n,\ \xi_k := x_k$.
Riemannsche Summe:

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} cos\ \frac{ka}{n} \cdot \frac{a}{n} = \frac{a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} cos\ \frac{ka}{n}$$

Für $t \in \mathbb{R}$ gilt:
$\sum_{k=1}^{n} cos\ kt = -\frac{1}{2} + \frac{sin\ (n+\frac{1}{2})t}{2 sin\ \frac{t}{2}} \quad (sin\ \frac{t}{2} \neq 0)(cos\ kt = \frac{1}{2}(e^{ikt} + e^{-ikt}))$
Mit $t = \frac{a}{n}$
$\Longrightarrow S_n = \frac{a}{n}\left[-\frac{1}{2} + \frac{sin\ (n+\frac{1}{2})\frac{a}{n}}{2 sin\ \frac{a}{2n}}\right] = -\frac{a}{2n} + \frac{a sin\ (a+\frac{a}{2n})}{2n sin\ \frac{a}{2n}} = -\frac{a}{2n} + \underbrace{\frac{\frac{a}{2n}}{sin\ \frac{a}{2n}}}_{\to 1} sin\ (a+a\frac{a}{2n}).$

Wir wissen, daß $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin\ x}{x} = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{sin\ x} = 1.$
Also gilt $\int_0^a cos\ x\ dx = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = sin\ a.$

(2) Sei $a > 1$ und betrachte $\int_1^a \frac{1}{x} dx$. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte die Unterteilung $x_k = a^{\frac{k}{n}}$, Stützstellen $\xi_k := x_{k-1},\ 1 \leq k \leq n$.
Riemannsche Summe:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a^{\frac{k-1}{n}}} \left(a^{\frac{k}{n}} - a^{\frac{k-1}{n}}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) = n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) \end{aligned}$$

Sei $x = \frac{1}{n}$. Dann ist $x > 0$ und $S_n = \frac{1}{x}(a^x - 1) = \frac{e^{x\ \log a} - 1}{x}$. Dann

$$\underline{\int_1^a \frac{dx}{x}} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ \log a} - 1}{x} = \underline{\log a}$$

3.4 Differentiation und Integration

Satz 16:
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $a \in I$. Für $x \in I$ sei $F(x) := \int_a^x f(t)dt$.
Dann ist $F : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $\underline{F' = f}$.

Beweis:
Für $h \neq 0$ gilt

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

Satz mit Spezialfall $\varphi = 1$: Es existiert $\xi_h \in [x, x+h]$ mit $\int_x^{x+h} f(t)dt = f(\xi_h) \cdot h$.
Für $h \to 0$ gilt $\xi_h \to x$. Außerdem ist f stetig $\Longrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(\xi_h) = f(x)$
$\Longrightarrow \lim\limits_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h \cdot f(\xi_h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} f(\xi_h) = f(x)$ □

Differentiation ist die Umkehrung der Integration. *Beachte:* Die obere Integrationsgrenze ist variabel: Unbestimmtes Integral. F mit $F' = f$ heißt <u>Stammfunktion</u> von f. Mit F ist auch $F + c$, $c \in \mathbb{R}$, Stammfunktion von f. Sind F, G Stammfunktionen von f, so gilt $F - G = c$, konstant.

Satz 17 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung):
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, F Stammfunktion von f. Dann gilt für $a, b \in I$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Bezeichnung:

$$F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a)$$

Beweis: Folgt aus Satz 16.

Beispiele:

(1) $\int_0^a \cos x \, dx = \sin x\Big|_0^a = \sin a - \sin 0 = \sin a$

(2) $\int_a^b \frac{dx}{x} = \log x\Big|_a^b = \log b - \log a$ für alle $a, b > 0$.
Aus jeder Formel zur Differentiation folgt eine Formel zur Integration.

(3) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \Longrightarrow \frac{1}{n}x^n$ ist Stammfunktion von x^{n-1}
$\Longrightarrow \int_a^b x^{n-1}dx = \frac{1}{n}x^n\Big|_a^b = \frac{b^n - a^n}{n}$

(4) $(e^x)' = e^x \Longrightarrow \int_a^b e^x dx = e^b - e^a$
Oft benutzte Schreibweise: Ist F Stammfunktion von f, so

$$\int f(x)dx = F \qquad \left(\int f = F\right)$$

(5) $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctan\ x,\ \int \frac{dx}{cos^2 x} = tan\ x$

Satz 18:
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, φ' stetig, $\varphi([a,b]) \subseteq I$.
Dann gilt:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

Beweis:
Sei F die Stammfunktion von f, d.h. $F' = f$. Wende Kettenregel auf $F \circ \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ an:

$$(F \circ \varphi)'(t) = \frac{d}{dt}(F(\varphi(t))) = \varphi'(t)F'(\varphi(t)) = \varphi'(t)f(\varphi(t))$$

Nach Satz 17: $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = (F \circ \varphi)(t)\Big|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$

$$= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt \text{ (da } F' = f)$$

□

Substitutionsregel:
In Anwendungen oft von rechts nach links gelesen:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

oder $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, d.h. Substitution $x = \varphi(t)$

φ^{-1} Umkehrfunktion

Beispiele:

(1) Seien c, d konstant, $I = \int_a^b f(cx+d)\ dx$. Substitution $cx + d = t$.
$x = \varphi(t) = \frac{t-d}{c}$ und $\varphi^{-1}(x) = cx + d,\ \varphi'(t) = \frac{1}{c}$. Also ist
$I = \int_a^b f(cx+d)\ dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(t)\frac{1}{c}\ dt = \frac{1}{c}F(t)\Big|_{ac+d}^{bc+d}$, wobei $F' = f$.

(2) Sei $-1 < a < b < 1,\ I = \int_a^b \sqrt{1-x^2}\ dx$. Substituiere
$x = \varphi(t) = sin\ t \Longrightarrow \varphi'(t) = cos\ t, \varphi^{-1}(x) = arcsin\ x = t$.
Seien $u = arcsin\ a, v = arcsin\ b$.
$I = \int_a^b \sqrt{1-x^2}\ dx = \int_u^v \sqrt{1 - sin^2\ t}\ \varphi'(t)\ dt = \int_u^v cos^2\ t\ dt$
Additionstheorem: $cos^2\ t = \frac{1}{2}(cos\ 2t + 1) \Longrightarrow I = \frac{1}{2}\int_u^v (cos\ 2t + 1)\ dt =$
$\frac{1}{2}\int_u^v cos\ 2t\ dt + \frac{1}{2}\int_u^v 1\ dt = \frac{1}{4}sin\ 2t\Big|_u^v + \frac{1}{2}t\Big|_u^v$
Es gilt $sin\ 2t = 2sin\ t\ cos\ t = 2sin\ t\sqrt{1 - sin^2\ t} \Longrightarrow I = \frac{1}{4}sin\ 2t\Big|_u^v + \frac{1}{2}t\Big|_u^v =$
$\frac{1}{2}sin\ t\sqrt{1 - sin^2\ t}\Big|_u^v + \frac{1}{2}t\Big|_u^v = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + arcsin\ x)\Big|_a^b$

(3) $a, b > 1, \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = log(x + \sqrt{x^2-1})\Big|_a^b$ (substituiere $x = cosh(t)$)
$a, b \in \mathbb{R}$
$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = log(x + \sqrt{x^2+1})\Big|_a^b$ (subs. $x = sinh(t)$)

Satz 19:
$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar, f', g' stetig. Dann gilt:
$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$

Beweis:
Folgt aus $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ durch Integration.

Beispiele:

(1) $a, b > 0,\ I = \int_a^b log\ x\ dx$. Setze $f(x) = log\ x,\ g(x) = x\ (g'(x) = 1)$
$\Longrightarrow I = \int_a^b f(x)g'(x)dx = x\ log\ x\Big|_a^b - \int_a^b \frac{1}{x}x\ dx = x\ log\ x\Big|_a^b - x\Big|_a^b = x\ log\ x - x\Big|_a^b$

(2) Für $k > 0$ sei $I_k = \int sin^k x\ dx$. Für $k \geq 2$ gilt:

$$\begin{aligned}
I_k &= -\int sin^{k-1}x(cos\ x)'\ dx \\
&= -sin^{k-1}x\ cos\ x + \int (sin^{k-1}x)'cos\ x\ dx \\
&= -sin^{k-1}x\ cos\ x + (k-1)\int sin^{k-2}x\ cos^2x\ dx \quad |cos^2x = 1 - sin^2x \\
&= -sin^{k-1}x\ cos\ x + (k-1)\int sin^{k-2}x\ dx - (k-1)\int sin^k x\ dx \\
&= -sin^{k-1}x\ cos\ x + (k-1)I_{k-2} - (k-1)I_k
\end{aligned}$$

Auflösen nach $I_k \Longrightarrow I_k = -\frac{1}{k}sin^{k-1}x\ cos\ x + \frac{k-1}{k}I_{k-2}$. Aus I_0 und I_1 können alle I_k mit dieser Rekursionsformel berechnet werden.
$I_0 = x, I_1 = -cos\ x$

3.5 Taylor-Reihen

Erinnerung: Unendliche Reihen der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ heißen Potenzreihen.

Hier $a_n \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ konstant, $x \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ Variable. Wir wissen

$$exp(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \ \forall x \in \mathbb{C}$$

$$cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}; \quad x \in \mathbb{C}$$

(Nützlich zur Berechnung)

Frage: Kann eine beliebige Funktion als Potenzreihe dargestellt werden?

Satz 20:
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)-$mal stetig differenzierbar (d.h. $f^{(n+1)}$ ist stetig). Dann gilt für $a \in I$ und $x \in I$:
$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$ mit
$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$

Beweis:
Für $n = 0$: (Satz 17, Fundamentalsatz)

I.A. $\int_a^x f'(t)\, dt = f(x) - f(a) \Longrightarrow f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt = f(a) + R_0(x)$

I.S. Die Behauptung gelte für n. Wir müssen die Gültigkeit für $n+1$ nachweisen.
Nach Voraussetzung: $R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$.
Partielle Integration:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_a^x \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right]' f^{(n+1)}(t)\, dt \\ &= -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(t)\Big|_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+2)}(t)\, dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(a)}{n+1} + \frac{1}{n+1} \int_a^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\, dt \end{aligned}$$

$\Longrightarrow R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\, dt$
$\Longrightarrow$ Durch Einsetzen folgt Behauptung für $n+1$ □

Diese Formel heißt Taylorformel.

Setze $x - a =: h$.
Dann ist

$$f(x) = \sum_{k=0}^{h} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + R_n(x); \ x = a + h$$

a heißt Entwicklungspunkt, R_n Restglied.

Es gilt auch

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1} \quad \text{für ein } \xi \in [a, x]$$

$\Longrightarrow$ Lagrange-Form von R_n

Folgt aus Mittelwertsatz der Integralrechnung.
Für $n \to \infty$ definiert man

$$T_f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad \text{Taylorreihe von } f \text{ im Entwicklungspunkt } a$$

Bemerkung:

(1) $T_f(x)$ muss nicht konvergieren.

(2) Falls $T_f(x)$ konvergiert, folgt nicht immer $T_f(x) = f(x)$.
Beispiel: $f(x) = exp(-\frac{1}{x^2}),\ x \in \mathbb{R}$

(3) Für $exp(x),\ cos(x),\ sin(x)$ findet man mit $a = 0$ die oben erwähnten Potenzreihen. Diese konvergieren immer (Quotientenkriterium).

(4) Für beliebige $a \in \mathbb{R}$ ist $exp^{(k)}(a) = exp(a)$.

$$exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{exp(a)}{k!}(x-a)^k = exp(a) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^k}{k!}$$

(5) Für $|x| < 1$ setze $f(x) = log(1+x)$. Dann gilt

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

Induktion:
$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k}$ für $k \geq 1$.
Mit $a = 0: \quad f^{(k)}(a) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ und

$$\begin{aligned} T_f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{k!} x^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \end{aligned}$$

Quotientenkriterium: $T_f(x)$ konvergiert absolut für $|x| < 1$.
Für alle x mit $|x| < 1$ zeigt man $|R_n(x)| \to 0$ für $n \to \infty$
$\Longrightarrow log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \quad \forall\, |x| < 1$

(6) $\alpha \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$

$$\binom{\alpha}{k} := \prod_{i=1}^{k} \frac{\alpha - i + 1}{i} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!};\ \binom{\alpha}{0} := 1$$

$\Longrightarrow$ verallgemeinerter Binomial-Koeffizient

Sei $f(x) = (1+x)^\alpha,\ |x| < 1$. Mit $a = 0$:

$$T_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Satz 21:
Sei $F : I \to \mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbar. Für alle $x \in I$ sei $T_f(x)$ konvergent und für alle $x \in I$ gelte $\underset{n\to\infty}{lim} R_n(x) = 0$. Dann ist $T_f(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ und jeden Entwicklungspunkt a.

Beweis:: Folgt aus Satz 20.

Beispiel:
$f(x) = log(1+x)$: Wir wissen

$$T_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k, \quad |x| < 1 \text{ absolut konvergent}$$

Restglied:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\ dt = (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\ dt$$

Sei $0 \leq x < 1$. Dann gilt $|1+t| \geq 1$ und $x - t \geq 0$.
$|R_n(x)| \leq \int_0^x (x-t)^n dt = \int_0^x u^n du = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Longrightarrow \underset{n\to\infty}{lim} R_n(x) = 0$
Analog für $-1 < x \leq 0$.
Satz 21 $\Longrightarrow T_f(x) = f(x) = log(1+x), \quad |x| < 1$.

Anhang A

Sätze

A.1 Grundlagen der Analysis

Satz 1:

(a) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $x = 0$ oder $x > 0$ oder $x < 0$

(b) Ist $x > 0, y > 0$, so folgt $x + y > 0$

(c) Ist $x > 0, y > 0$, so folgt $xy > 0$

Satz 2:

(a) Ist $x < 0$, so folgt $-x > 0$

(b) Ist $x < y$ und $x' < y'$ so folgt $x + x' < y + y'$

(c) Ist $x < y$ und $a > 0 \Longrightarrow ax < ay$.
Ist $a < 0$, so $ax > ay$

(d) Ist $x \neq 0$, so gilt $x^2 > 0$

(e) Ist $0 < x < y$, so folgt $0 < y^{-1} < x^{-1}$

Satz 3:

(a) Es gilt stets $|x| \geq 0$ und $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

(b) $|-x| = |x|$

(c) $|xy| = |x||y|$, $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$ falls $y \neq 0$.

Satz 4:
Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung)
und $|x + y| \geq |x| - |y|$.

Satz:
Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Satz 5:
Sei $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:
$(1+x)^n \geq 1 + nx$ (Bernoullische Ungleichung)

Satz 6:
In jedem offenen Intervall von $\mathbb{R}$ gibt es unendlich viele rationale Zahlen.

Satz 7:
Das abgeschlossene Intervall $[0,1]$ ist überabzählbar in $\mathbb{R}$.

Satz 8:
Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Satz 9:
Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

Satz 10:
Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen, $\underset{n\to\infty}{lim} a_n = a$, $\underset{n\to\infty}{lim} b_n = b$.

(a) Dann ist $(a_n + b_n)$ konvergent mit Grenzwert $a + b$.

(b) $(a_n b_n)$ ist konvergent mit Grenzwert ab.

(c) Sei $b \neq 0$. Dann gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$. Außerdem ist die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq n_0}$ konvergent mit dem Grenzwert $\frac{a}{b}$.

Satz 11:
Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen reeller Zahlen, $\underset{n\to\infty}{lim} a_n = a$, $\underset{n\to\infty}{lim} b_n = b$.
Gilt $a_n \leq b_n$ für $n \geq 1$, so ist $a \leq b$.

Satz 12:
Jede <u>konvergente</u> Folge <u>reeller</u> Zahlen ist eine Cauchy-Folge.

Satz 13:
In $\mathbb{R}$ ist jede Cauchy-Folge konvergent.

Satz 14 (Satz von Bolzano-Weierstraß):
Jede beschränkte Folge reeller Zahlen hat eine konvergente Teilfolge.

Satz 15:
Jede beschränkte und monotone Folge ist konvergent.

Satz:
Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, so ist (a_n) eine Nullfolge.

Satz 16 (Satz von Leibniz):
Sei (a_n) monoton fallend, $a_n \geq 0 \ \forall n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergent (alternierende Reihe).

Satz 17:
Ist eine Reihe absolut konvergent, so ist sie auch konvergent.

Satz 18: (Majorantenkriterium)
Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent, $c_n \geq 0 \ \forall n$
Ist (a_n) Folge mit $|a_n| \leq c_n \ \forall n$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Satz 19: (Quotientenkriterium)
Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ Reihe mit $a_n \neq 0$ für $n \geq n_0$. Sei $\Theta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \Theta < 1$ und $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq \Theta \ \forall n \geq n_0$
Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Satz 20:
Die Exponentialreihe konvergiert absolut für alle $x \in \mathbb{R}$.

Satz:
$x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Satz 21:
Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $exp(x+y) = exp(x) \cdot exp(y)$.

Satz 22:
Die Reihe $log(x)$ konvergiert absolut für $|x| < 1$.

A.2 Stetige Funktionen

Satz 1:
Jede nicht-leere nach oben (unten) beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum (Infimum).

Satz 2:
$f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in D,\ \lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch
$f + g : D \to \mathbb{R},\ fg : D \to \mathbb{R},\ \lambda f : D \to \mathbb{R}$ stetig in a.
Ist $D' = \{x \in D | g(x) \neq 0\}$ und $a \in D'$, so ist auch $\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R}$ stetig in a.

Satz 3:
$f : D \to \mathbb{R},\ g : E \to \mathbb{R},\ f(D) \subseteq E$. Sei f stetig in $a \in D,\ g$ stetig in $b := f(a) \in E$. Dann ist auch $g \circ f$ stetig in a.

Satz 4 (Zwischenwertsatz):
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) < 0,\ f(b) > 0$. Dann gibt es $p \in [a, b]$ mit $f(p) = 0$.

Satz 5:
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und stetig. Dann hat f ein Maximum und ein Minimum auf $[a, b]$.

Satz 6:
Sei $D \subseteq \mathbb{R},\ f : D \to \mathbb{R}$ und $p \in D$. Es gilt:

$$f \text{ ist stetig in } p \iff \text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ gibt es } \delta > 0 \text{ mit } |f(x) - f(p)| < \varepsilon, \text{ falls } |x - p| < \delta.$$

Satz 7:
Jede auf einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall $[a, b]$ stetige Funktion ist dort gleichmäßig stetig.

Satz 8:
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)\ \forall x \in [a, b]$

(2) $|\varphi(x) - \psi(x)| \leq \varepsilon\ \forall x \in [a, b]$

Jede stetige Funktion auf $[a, b]$ kann also beliebig genau durch Treppenfunktionen approximiert werden.

Satz 9:
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend (fallend). Man setze $A := f(a),\ B := f(b)$.
Dann ist $f : [a, b] \to [A, B]$ ($f : [a, b] \to [B, A]$) eine Bijektion und die Umkehrfunktion $f^{-1} : [A, B] \to [a, b]$ ($f^{-1} : [B, A] \to [a, b]$) ebenfalls stetig und streng monoton wachsend (fallend).

Satz 10:
Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, definiert durch $f(x) = x^k$ stetig, streng monoton wachsend und eine Bijektion. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ist ebenfalls stetig, streng monoton wachsend und bijektiv. Sie wird als k-Wurzel bezeichnet.

Schreibweise: $f^{-1}(x) := \sqrt[k]{x}$.

Satz 11:
Die Funktion $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ist stetig, streng monoton wachsend und bijektiv. Die Umkehrfunktion $exp(x)^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ wird mit log(oder ln) bezeichnet und heißt natürlicher Logarithmus.
Die Funktion log ist ebenfalls stetig, streng monoton wachsend und bijektiv.
Es gilt:

$$log(xy) = log(x) + log(y)\ \forall x, y > 0$$

Satz 12:
Die Funktion $exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ist stetig und es gilt:

(a) $exp_a(x + y) = exp_a(x) \cdot exp_a(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

(b) $exp_a(n) = a^n\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

(c) $exp_a(\frac{p}{q}) = \sqrt[q]{a^p}\ \forall p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$.

Satz 13:

(a) Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty,\ \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0$.

(b) $\lim\limits_{x\downarrow 0} log(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty} log(x) = \infty$

(c) $\lim\limits_{x\downarrow 0} x^\alpha = 0,\ \lim\limits_{x\downarrow 0} x^{-\alpha} = \infty$ ($\alpha > 0$ reell)

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{log(x)}{x^\alpha} = 0$ ($\alpha > 0$ reell)

Satz 14:
Seien $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

(a) $|z| \geq 0$ und $|z| = 0 \iff z = 0$

(b) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Dreiecksungleichung)

(c) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

Satz 15:
Sei $(c_n)_{n\geq 1}$ eine Folge komplexer Zahlen. Die Folge (c_n) konvergiert genau dann, wenn $(Re(c_n))_{n\geq 1}$ und $(Im(c_n))_{n\geq 1}$ konvergieren.

Satz 16:
Eine Folge $(c_n)_{n\geq 1}$ komplexer Zahlen ist genau dann eine Cauchy-Folge, wenn $(Re(c_n))_{n\geq 1}$ und $(Im(c_n))_{n\geq 1}$ Cauchy-Folgen sind.

Satz 17:
In $\mathbb{C}$ ist jede Cauchy-Folge konvergent.

Satz 18:
Seien $(c_n)_{n\geq 1}$ und $(d_n)_{n\geq 1}$ konvergente komplexe Folgen. Dann sind auch $(c_n \pm d_n)_{n\geq 1}$ und $(c_n \cdot d_n)_{n\geq 1}$ konvergent und es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (c_n \pm d_n)_{n\geq 1} &= \lim_{n\to\infty} c_n \pm \lim_{n\to\infty} d_n \\ \lim_{n\to\infty} (c_n \cdot d_n)_{n\geq 1} &= \lim_{n\to\infty} c_n \cdot \lim_{n\to\infty} d_n \end{aligned}$$

Ist $\lim\limits_{n\to\infty} d_n \neq 0$, so gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $d_n \neq 0$ für alle $n \geq N$ und es gilt

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq N}} \frac{c_n}{d_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} c_n}{\lim\limits_{n\to\infty} d_n}$$

Satz 19:
Die Funktionen $cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig auf $\mathbb{R}$.

Satz 20:
Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} cos\ (x+y) &= cos\ x \cdot cos\ y - sin\ x \cdot sin\ y \\ sin\ (x+y) &= sin\ x \cdot cos\ y + cos\ x \cdot sin\ y \end{aligned} \qquad \text{(Additionstheoreme)}$$

Satz 21:
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$cos\ x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad sin\ x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Satz 22:
Die Funktion cos hat im Intervall $[0, 2]$ genau eine Nullstelle.

Satz 23:

(a) $cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ ist streng monoton fallend und bijektiv.
Umkehrfunktion $arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ (Arcus Cosinus)

(b) $sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ ist streng monoton wachsend und bijektiv.
Umkehrfunktion $arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (Arcus sinus)

Satz 24: (Polarkoordinaten)
Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$z = r \cdot e^{i\varphi},\ r = |z| \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

A.3 Differentiation und Integration

Satz 1:
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in D$. $f : D \to \mathbb{R}$ ist in a genau dann differenzierbar, wenn es $c \in \mathbb{R}$ und $\varphi : D \to \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) = f(a) + c(x-a) + \varphi(x)\ \forall x \in D$, wobei $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{\varphi(x)}{x-a} = 0$.

Satz 2:
Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in D, $x \in D$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $f+g$, λf und $fg : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in D und es gilt

$$(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x),\ (\lambda f)'(x) = \lambda f'(x),\ (fg)'(x) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

Ist $g(\xi) \neq 0$ für alle $\xi \in D$, so ist auch $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in D und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Satz 3:
Sei $D \in \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ sei stetig und streng monoton. Sei $\overline{D} = f(D)$ und sei $\varphi = f^{-1} : \overline{D} \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von f. Ist f in $x \in D$ differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$, so ist φ im Punkt $\varphi := f(x)$ differenzierbar und es gilt

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(\varphi(y))}$$

Satz 4 (<u>Kettenregel</u>):
Seien $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. f sei in $x \in D$ differenzierbar, g sei in $y = f(x) \in E$ differenzierbar. Dann ist auch $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Satz 5:
$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ besitze ein lokales Maximum oder Minimum in x und sei in x differenzierbar. Dann gilt $f'(x) = 0$.

Satz 6 (<u>Satz von Rolle</u>):
Sei $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) = f(b)$. Außerdem sei f in (a,b) differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Satz 7 (<u>Mittelwertsatz</u>):
Sei $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) differenzierbar.
Dann gibt es $\xi \in (a,b)$ mit $f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a)$.

Satz 8:
Sei f stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b). Für alle $x \in (a, b)$ gelte $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) > 0, f'(x) \leq 0, f'(x) < 0$). Dann ist f monoton wachsend in (a, b) (streng monoton wachsend, bzw. monoton fallend, bzw. streng monoton fallend).

Satz 9:
Sei f in (a, b) differenzierbar und in $x \in (a, b)$ zweimal differenzierbar.
Es gelte $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$).
Dann hat f in x ein Minimum (Maximum).

Satz 10:
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar.
f ist genau dann konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in D$ gilt.

Satz:
Das Integral von $\varphi \in T[a, b]$ ist unabhängig von der gewählten Unterteilung von $[a, b]$.

Satz 11:
Seien $\varphi, \psi \in T[a, b],\ \lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(a) $\int_a^b (\varphi + \psi)(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b \psi(x)dx$

(b) $\int_a^b (\lambda\varphi)(x)dx = \lambda \int_a^b \varphi(x)dx$

(c) Ist $\varphi \leq \psi$, so gilt $\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b \psi(x)dx$

Satz 12:
Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R},\ \lambda > 0$ reell. Dann gilt

(a) $\int_a^{b^*} (f + g)(x)dx \leq \int_a^{b^*} f(x)dx + \int_a^{b^*} g(x)dx$
$\int_{a\,*}^{b} (f + g)(x)dx \geq \int_{a\,*}^{b} f(x)dx + \int_{a\,*}^{b} g(x)dx$

(b) $\int_a^{b^*} (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^{b^*} f(x)dx$
$\int_{a\,*}^{b} (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_{a\,*}^{b} f(x)dx$

Satz 13:
Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f integrierbar.

Satz 14:
Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton, so ist f integrierbar.

Satz 15 (Mittelwertsatz der Integralrechnung):
$f, \varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig; $\varphi \geq 0$. Dann gibt es $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Satz:
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für jede Unterteilung des Intervalls $[a, b]$ der Feinheit $\eta \leq \delta$ und jede Wahl der Stützstellen ξ_k gilt

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon$$

Mit anderen Worten: Das Integral von f kann durch Riemannsche Summen beliebig genau approximiert werden. Unterteilung und Stützstellen sind beliebig.

Satz 16:
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $a \in I$. Für $x \in I$ sei $F(x) := \int_a^x f(t)dt$. Dann ist $F : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $\underline{F' = f}$.

Satz 17 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung):
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, F Stammfunktion von f. Dann gilt für $a, b \in I$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Bezeichnung:

$$F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a)$$

Satz 18:
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, φ' stetig, $\varphi([a, b]) \subseteq I$.
Dann gilt:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

Satz 19:
$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar, f', g' stetig. Dann gilt:
$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$

Satz 20:
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ $(n + 1)-$mal stetig differenzierbar (d.h. $f^{(n+1)}$ ist stetig). Dann gilt für $a \in I$ und $x \in I$:
$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(x)$ mit
$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)dt$

Satz 21:
Sei $F : I \to \mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbar. Für alle $x \in I$ sei $T_f(x)$ konvergent und für alle $x \in I$ gelte $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Dann ist $T_f(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ und jeden Entwicklungspunkt a.

Anhang B

Einige Ableitungen

F(x)	f(x)	f'(x)
$c \cdot x$	c	0
$\frac{1}{2}x^2$	x	1
$log\ x$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{nx^{1+\frac{1}{n}}}{1+n}$	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$2\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$
$\frac{1}{r+1}x^{r+1}$	$x^r\ (r \neq -1)$	rx^{r-1}
$\frac{1}{a} \cdot log\ \|ax+b\|$	$\frac{1}{ax+b}$	$-\frac{a}{(ax+b)^2}$
$\frac{2}{3a}\sqrt{(ax+b)^3}$	$\sqrt{ax+b}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$
$\frac{2}{a}\sqrt{ax+b}$	$\frac{1}{\sqrt{ax+b}}$	$-\frac{a}{2\sqrt{(ax+b)^3}}$
$\frac{1}{a(r+1)}(ax+b)^{r+1}$	$(ax+b)^r\ (r \neq -1)$	$ar(ax+b)^{r-1}$
e^x	e^x	e^x
$\frac{a^x}{log\ a}$	a^x	$a^x log\ a$
$\frac{1}{k} \cdot e^{kx}$	e^{kx}	$k \cdot e^{kx}$
$x \cdot log\ x - x$	$log\ x$	$\frac{1}{x}$
$-cos\ x$	$sin\ x$	$cos\ x$
$sin\ x$	$cos\ x$	$-sin\ x$
$-log\ \|cos\ x\|$	$tan\ x$	$\frac{1}{cos^2 x}$ bzw. $1 + tan^2 x$
$cosh\ x$	$sinh\ x$	$cosh\ x$
$sinh\ x$	$cosh\ x$	$sinh\ x$
$-2x + log(1+e^{2x})$	$tanh\ x$	$\frac{1}{cosh^2 x}$
$\sqrt{1-x^2} + x\ arcsin\ x$	$arcsin\ x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1 < x < 1$
$-\sqrt{1-x^2} + x\ arccos\ x$	$arccos\ x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x\ arctan\ x - \frac{1}{2}log(1+x^2)$	$arctan\ x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$-\sqrt{1+x^2} + x\ arsinh\ x$	$arsinh\ x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$(-1-x) \cdot \sqrt{\frac{-1+x}{1+x}} + x \cdot arcosh\ x$	$arcosh\ x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$x \cdot artanh\ x + \frac{1}{2}log(1+x^2)$	$artanh\ x$	$\frac{1}{1-x^2}$

f(x)	n-te Ableitung
$log\ x$	$(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{x^n}$
e^{kx}	$k^n \cdot e^{kx}$
a^x	$(log\ a)^n \cdot a^x$
$sin\ kx$	$k^n sin\left(kx + \frac{n\pi}{2}\right)$
$cos\ kx$	$k^n cos\left(kx + \frac{n\pi}{2}\right)$

f(x)	F(x)
$\frac{1}{ax^2+bx+c}$	$\frac{2 \cdot arctan\left[\frac{b+2ax}{\sqrt{-b^2+4ac}}\right]}{\sqrt{-b^2+4ac}}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$log\ \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

Anhang C

Ableitungs- und Integrationsregeln

Ableitungsregeln:

Summenregel	$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
Faktorregel	$f(x) = c \cdot u(x),\ c \in \mathbb{R}$	$f'(x) = c \cdot u'(x)$
Produktregel	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
Quotientenregel	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$
Kettenregel	$f(x) = u(v(x))$	$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Integrationsregeln:

Summenregel	$\int_a^b [u(x) + v(x)]dx$	$= \int_a^b u(x)\ dx + \int_a^b v(x)\ dx$
Faktorregel	$\int_a^b c \cdot u(x)\ dx$	$= c \cdot \int_a^b u(x)\ dx$
Produktregel	$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\ dx$	$= u(x) \cdot v(x)\big\vert_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\ dx$
Substitutionsregel		
-lineare	$\int_a^b u(mx + c)\ dx$	$= \frac{1}{m} \cdot \int_{ma+c}^{mb+c} u(v)\ dv$
-allgemeine	$\int_a^b u(v(x)) \cdot v'(x)\ dx$	$= \int_{v(a)}^{v(b)} u(v)\ dv$

Anhang D

Griechische Buchstaben

	α	Alpha
	β	Beta
Γ	γ	Gamma
Δ	δ	Delta
	ϵ, ε	Epsilon
	ζ	Zeta
	η	Eta
Θ	θ, ϑ	Theta
	ι	Jota
	κ	Kappa
Λ	λ	Lambda
	μ	My
	ν	Ny
Ξ	ξ	Xi
	o	Omikron
Π	π, ϖ	Pi
	ρ, ϱ	Rho
Σ	σ, ς	Sigma
	τ	Tau
Υ	υ	Ypsilon
Φ	φ	Phi
	χ	Chi
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Omega

Index